一般ゲージ場論序説

内 山 龍 雄 著

岩 波 書 店

まえがき

本書は一般ゲージ場の理論に対する入門書である．本書が特に目指したことは，一般ゲージ場という概念が，どのような意図のもとに，またどのような思索の経路をたどって物理学の中に導入されたかに関する詳しい解説である．したがってその応用例についてはあまり深く立ち入らない．また量子化の問題にもふれない．本書の題名に序説とあるのも，また上述のように入門書と格付けしたのも，すべてこのような内容にもとづく．

ゲージ場という概念が物理学にはじめて登場したのは Weyl の統一場理論である．しかし彼の理論は所期の目的を果たさず，これに続く種々のタイプの統一場理論とともに，物理学界から忘れ去られた．

一方，1935 年に発表された湯川の中間子論は，その後，メソンの発見により一躍，時代の脚光を浴びるに至った．この理論の初期の段階では，メソン場は重力場および電磁場に続く第三の力の場，また電荷と質量をもった“電磁場の仲間”とみなされていた．たとえば，戦後まもなく外国の学会誌に，6 次元の時空を基礎にした，これら 3 種の場の統一理論が発表されたが，これなどは当時の人々のメソン場に対する位置づけを示す一例といえよう．

1954 年，Yang と Mills は，アイソスピン空間の回転に対して物理法則が不変というよく知られた原理をさらに一歩，強い要請に拡張することにより正負ならびに 0 の電荷をもつ 3 種類の“電磁場の仲間”が存在しうることを指摘した．これは現在，Yang–Mills 場とよばれているもので，彼等は一般ゲージ場の新しい品種の最初の理論的発見者と讃えられるべきであろう．

ところで著者は湯川博士の傍系の門下生であるが，以前から，またメソンの存在が実証された後も，中間子論に対して，ひそかに疑念を抱いていた．Einstein の重力論や，Maxwell の電磁場論とは異なり，中間子論は現象論の一種ではなかろうかという疑いである．特に戦後まもなく発表された Fermi と Yang の“メソンは素粒子か？”という論文を見てからは，さらにこの疑念を強くした．完成された中間子論の姿を眺めても，前二者と異なり，そこには理論的な必然性が欠けている．これが疑念を抱かせた最大の原因である．

物体に石が衝突したとき，物体が受ける衝撃力は，現象論的な力学では，石がその伝達者である．しかし原子的レベルで見れば，石と物体それぞれの原子の間に介在する電磁場により力は伝達される．もし Fermi, Yang のいうようにメソンが素材粒子の複合体ならば，核力の伝達者はメソン自身ではなく，石の衝突の場合と同様に，メソンの素材粒子と核子の間に，核力の真の伝達者として電磁場によく似た未知の場が介在すると考える方が自然ではなかろうか？さらに Fermi たちの主張するように，メソンが核子と反核子の結合体とするならば，この未知の場は，これらの接着剤の役も担うことになり，石の話はますます適切な比喩となる．また上述の 6 次元時空の話に戻れば，重力場や電磁場と統一的に扱われるべき第三の力の場は，メソン場ではなくて，この未知の場と考えるべきである．以上が著者の以前からの直観的な持論である．

そこでこの未知の場の存在の可能性を示すために，まず重力場と電磁場に共通する性格を抽出しようと考えた．それには往年の統一場理論の学習がもっとも近道である．特に Weyl の理論には学ぶべき貴重なアイディアが埋もれたままになっている．このような経路をたどって発表されたものが著者の 1956 年の一般ゲージ場の理論である．

ここで私事にわたり恐縮だが，著者の油断から上述の論文の発表がおくれ，Yang と Mills に先を越されたのは，身から出た錆とはいえ，誠に無念である．しかしあえていうならば，現代的な超統一理論への第一歩を意図して重力場も一般ゲージ場の範疇にはいることを，初めて明確に示したのは著者のこの論文である．それよりもっと重視してもらいたいことは，重力場にしても電磁場にしても基本的な力の場は，数学でいう接続係数とよばれるものにより表現されるという主張である．著者はこのような場を第一種の場と名づけたが，これが現在，ゲージ場とよばれているものである．局所的変換群に伴う“接続”という概念こそ基本的相互作用の表現に不可欠な道具である．この主張こそ，著者が論文の中で言いたかった最も重要な点である．

Yang, Mills ならびに著者の論文はいずれも発表当時はもちろん，その後も 20 年近くほとんど学界では問題にされなかった．わずかに相対論の研究者のなかに，著者の論文に関心をもった者もいたが，けっして多数とはいえない．ところが GWS 理論が発表され，それが成功を収めるや，ゲージ場の理論も急

に注目を集めるようになった．特にこれを用いて基本的相互作用を統一的に記述しようという野心的な試みが，最近にわかに活発になってきた．ひそかに統一場理論への入口を模索中に，一般ゲージ場が，それへの門を開く重要な鍵であることを最初に見つけた著者にとっては，このような状況は誠に喜ばしいことである．しかし，それにもかかわらず，日本人である著者の業績のみが依然として無視されがちな傾向にあることに対しては，正直なところ，不快の念を禁じえない．

しかし今回，幸いにも岩波書店から一般ゲージ場の理論に対する入門書を出版する機会を与えられた．そこでこの序文のはじめに述べたような趣旨の書物を書きあげるには，これまで述べてきた著者年来の考えを本書で披露してみせるのが最もよいと考えた．なぜなら，それは本書の目的に最適であるだけでなく，同時に不満の解消にも少しは役立つと思うからである．なおここで，誤解のないように，一言付け加えたい．本書にはゲージ場という概念の誕生の経緯が詳しく解説されている．だからといって本書を時代おくれの教科書と早合点してはならない．温故知新という言葉は先哲が本書のために用意してくれたものである．

ところで本書を読破するには特殊相対論に関する概略の知識が必要である．それさえあれば，あとは章を追って順に読み進めば必ず最後まで理解できるように説明してある．

本書の冒頭には一般相対論の枢要な部分が簡潔に，しかし後の各章を理解するのに十分なように解説されている．つづいて Weyl および Kaluza-Klein の統一場理論の要旨も紹介されている．これらは最近では他の書物にはめったにみかけないものである．また仮に原論文を手にしても，理解しにくいから，本書の解説はおそらく読者に便利なものと思う．第 11 章一般ゲージ場の例のうち，11.3 と 11.4 は，著者が最も力をいれた箇所である．そこには，著者の原論文では冗長を嫌って割愛したことも含めて，納得がいくまでその考えが述べられている．第 13 章および付録 A も本書だけのものと自負している．最後の付録 B は読者に贈る好意のしるしと考えていただきたい．

現代物理学の中で最も野心的な問題のひとつである統一理論に挑戦しようとする数少ない学部学生や，優れた大学院生にとって，本書が少しでもその勉学

の助けとなれば，著者にとっては大きな喜びである．

1987年8月28日

内　山　龍　雄

目　　次

第II編 不変変分論

第III編 ゲージ場の一般論

第Ⅳ編　統一理論への応用

付　　録

第I編

相対論および統一場理論

I

緒　　論

20世紀は，量子論と相対性理論という物理学における二つの偉大な理論の誕生によって，その幕をあけた．その後，前者は原子から原子核へ，さらに素粒子から素粒子自身の構造の探究へと，一歩一歩，極微の世界の解明に突き進んだ．これに対して後者では，惑星の運動をはじめ，種々の天体現象の説明，はては宇宙論にいたるまで，その活躍の舞台は，空間的ばかりでなく時間的にも，すべて天文学的な巨大スケールの分野にかぎられていた．このように理論の適用分野が大きくへだたっていたことも一因となって，両理論の融合は，それを企てる試みがしばしばあったにもかかわらず，永い間，実現されなかった．

ところが，いま，今世紀の終幕を目の前にして，両理論の握手がようやく実現しようとしている．すべての物質の容器であり，すべての物理現象の舞台である時空，その幾何学的状態を表わす重力場(重力をこのように理解することが，一般相対性理論の基本的な考え方である)．これに対立するものとして，時空の中に浸かっているあらゆる物質，それの存在の支えとなっている電磁力をはじめとする三つの基本力，あるいはこれらの力の起因となる3種の基本的場(これらは素粒子物理学における主役である)．以上合計4種の基本的場を同一の視点から統一的に記述する可能性が近年にわかに増大してきた．

これは半世紀以上昔，流行した統一場理論の再来ともいえる．このような可能性の招来のひとつの大きなきっかけは一般ゲージ場論の誕生である．

一般ゲージ場のひとつの例は1954年C. N. YangとR. L. Mills[1),2)]によって発表された．一般ゲージ場という概念は，その名が示すように，1918年に発表されたH. Weyl[3)]のゲージ変換論にその端を発しているといえよう．1915

年，Einstein の一般相対性理論*)が発表され，重力を時空の幾何学的属性とみなす考え方が大成功を収めるや，その当時の人々に知られていたもうひとつの場，すなわち電磁場をも同様な考え方で表現しようとする試みが，物理学者のみならず数学者の間でも，興味の中心となった．このような考えを統一場理論というが，この種の研究の第1号が上に述べたWeylのゲージ理論である．

Weyl の理論はなかなか興味深い示唆に富んだものであったが，後に本書でも説明するように，根本的な欠点をもち，いつしか忘れ去られることになった．Weylに続いて，いくつかの異なったタイプの統一場理論が発表され，Einstein 自身も，相対論の完成以後は，その残りの全生涯を統一場理論の研究に捧げた．しかし結局は成功したものはひとつもなかった．そのようなわけで，1930 年代以降は，一部の数学者や物理学者を除いては，すべての物理学者が，統一場理論の目指す自然像を“見当違い”と考え，これをタブー視し，これに引きこまれぬよう統一場理論から遠ざかっていった．

統一場理論が物理学者から敬遠されるようになった理由のうち，最大のものは，次のことである．Weylが彼のゲージ論を発表した当時は，物理学者にその存在を認知されていた場といえば，重力場と電磁場しかなかった．ところが，その後，湯川場の存在が確認され，さらに第二次世界大戦後は，続々と多数の素粒子(場)が発見されるに及んで，事情は一変した．

もし電磁場を重力場と同様に時空の性質に帰属させることが正しいとするならば，電磁場の同類とみなされていたすべての素粒子場も電磁場と同じ形式で幾何学的に記述されねばならないであろう．これを実行することは至難の技である．たとえそのような理論を造ることができたとしても，それにはさらに次のような弱点がある．すなわちこの考えに従えば，新種の素粒子が1個発見されるごとに，それまで正しいものとされていた時空の幾何学的性質，たとえば4次元距離空間といったような性質を，まったく別のものに造りかえねばならないことになる．たとえば4次元を5次元に変えるとか，いままでなかった新しい自由度を時空に追加するといったように，つぎからつぎへと，時空の幾何学的構造をより複雑なものに変えてゆかねばならない．しかし次元数が1だけ

*) これからは差支えないかぎり相対性理論を略して“相対論”とよぶことにする．

増加しただけでも，物理法則，たとえば波の伝播の法則はまったく異なったものになる．時空に対するこのような描像は的を射たものとはとても思えない．場の種類がわずかな数に限られているならばともかく，新種の素粒子場の発見がつぎつぎと続いたその当時，このような自然像には，われわれはとてもついてゆけなかった．以上が往年の統一場理論の衰退した理由の主たるものである．

相対論や統一場理論が物理学の中心から次第に遠ざかるとともに，これらに代わってその檜舞台に登場してきたのが素粒子物理学である．これの対象である素粒子は，第二次世界大戦後，その新しい種類が続々と発見され，それに伴って，これらの素粒子の分類も著しく進歩した．現在では，レプトンとよばれる電子の仲間を別にすれば，すべての素粒子はクォークという名の基本粒子だけからできていると考えられている．

一方，クォーク同士を結合させる“強い力”，レプトン同士あるいはレプトンとクォークの間に働く“弱い力”，これと電磁力および重力，以上 4 種の力がすべての物質の間に働く力の根源であり，これらを“接着剤”として，われわれの宇宙ができあがっているという自然像が，ほぼ間違いないものとして定着しつつある．

ところで，一般ゲージ場論が確立され，Einstein の重力場が電磁場と同じように，ゲージ場の範疇に属すということが示されたのは，さきにも述べたように，1950 年代なかばのことである[2]．しかしこの理論はその後，10 年間ほどまったく見向きもされなかった．その理由は，つぎのようなものと思われる．

一般ゲージ場の存在は，純粋に論理的，数学的な推論からの必然的な結論であり，推論の途中には，実験により得られた知識を一切，借用していない．そのために，この理論は数学と同様に，ひとつの可能性を示すものではあるが，現実の自然界にそれが役立つという保証はない．これが当時の人々の考えであったと想像される．

ところが 1960 年代になって，Glashow[4] や，Weinberg, さらに Salam たちが電磁場と“弱い力”の場を，一般ゲージ場論を用いて統一的に表現することに成功し，ゲージ場の理論は急に学界の注目をあびるようになった．さらに，クォーク同士を結びつけている“強い力”もゲージ場の一種と考えれば，クォークと反クォークの結合粒子と考えられている中間子(例えばチャーモニゥム)

の質量スペクトルに対し，その実験的に知られている値を，理論的に再現できることがわかった．またクォークの結合体である素粒子を破壊してクォークを単独で取り出そうとしても，今までそれができなかったことに対する理由も，もしその結合力が一般ゲージ場に基づくものと考えれば，何とか納得がいくこともわかった．ここで重力場が一般ゲージ場の一種であることがすでに示されている事実を思いおこせば，四つの基本力はすべて一般ゲージ場により表現されることになる．

ここまでくると，これら4種の基本的場を多成分をもったひとつのゲージ場によって統一的に記述しようと考えるのは無理もない願望といえよう．これは往年の統一場理論の復活である．現在，重力場以外の3種の場を統一しようとする大統一理論，これに重力場も加えた超統一理論が精力的に研究されている．これらの試みは満足できるような段階にまではまだ進展していないが，これらの基盤にある共通な考え方として次のようなことがある．すなわち，これらのどの理論でも，4種の基本的場は，もともとは互いにいわばまったく同じ顔つきをした兄弟で，この成分が重力場，あの成分が電磁場といったように区別することは，本来は不可能と考える．一方現実の世界では，四つの場には大きな違いがあるが，そのような差異を生みだした原因は，これらの場の活躍の舞台である宇宙の進化発展と膨張に伴う温度の低下にあると考えられている．

この考えが正しいものとすれば，それはまことに驚くべき可能性をわれわれに与えることになる．すなわち，素粒子物理学を出発点とし，ゲージ場論を道具に用いて完成されようとしている新しい統一場理論は，今まで不可能とあきらめていた宇宙の誕生と進化の秘密を解き明かしてくれることになる．これは相対論と量子論の握手が生み出した誠に偉大な成果といえよう．

このような興味深い分野の研究はあまりにも急激に発展しつつあるので，本書ではこの種の理論の説明には立ち入らぬことにしたい．むしろ，一般ゲージ場という概念がどのようにして生まれてきたか，それに対する著者自身の思索の歴史をたどることによって，ゲージ場の意義を理解してもらうことが本書のねらいである．ただ，最後の章で，Glashow たちの電弱相互作用の統一理論や，また最近，特に注目を集めている，重力場と他の一般ゲージ場の Kaluza 型統一理論について，ゲージ場の理論の応用という立場から解説を試みた．

2

一般相対性理論

一般ゲージ場論の端緒となった Weyl のゲージ理論を説明するためには，その前にまず一般相対論の要点を簡潔に述べておくほうがよかろう．

2.1　時空

Einstein の一般相対論では，われわれを包む時空は4次元距離空間(Riemann 空間)とみなされる．つまり時空は4次元連続体で，その中の，隣接した任意の一対の点に対して，それらの間の距離がどんな値になるかがきめられている(物理的にいえば，その値を測定できる)空間であるということを大前提とする．

時空内に起こるいろいろの事件(event)は，この4次元空間の中の点(世界点ともいう)により表わされる．任意の点の近所に，適当に座標軸を設置し，これを基準にすれば，その点の近くの世界点の位置は4個の数(x^0, x^1, x^2, x^3)で指定される．この4個の数を世界点の座標とよび，x^μ $(\mu=0,1,2,3)$，あるいは簡単にxで表わす．

任意の世界点P(その座標をx)，およびそれに隣接した任意の点Q(座標を$x+\Delta x$)の間の距離Δsは

$$\Delta s^2 \overset{d}{\equiv} \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu \tag{2.1}$$

によって与えられるものとする*)．座標系があらかじめきめられていれば，$g_{\mu\nu}$

---

*)　本書では“AとはBのことである”という定義を$A\overset{d}{\equiv}B$とかくことにする．

$(=g_{\nu\mu})$は一般にxのきまった関数となる．時空が距離空間であるということは，時空の中のすべての点に，それぞれきまった値をもつ$g_{\mu\nu}$という量が与えられているということである．あるいは，“座標系をきめたとき，時空内にはxの関数$g_{\mu\nu}$が存在する”といってもよい．時空の幾何学的性質がどんなものであるかは，$g_{\mu\nu}$がxのいかなる関数であるかにより定まる．

$g_{\mu\nu}$の添字μ, νは，それぞれ独立に$0, 1, 2, 3$という値をとるから，$g_{\mu\nu}(=g_{\nu\mu})$は合計10個の関数である．それらを一括して**計量テンソル**，また10個の$g_{\mu\nu}$のそれぞれをテンソルの成分とよぶ．

ところで，(2.1)のμ, νのように，同一の項の中に同じ文字で表わされた添字が上下にでてきたときは，その添字について0から3まで和をとるものと約束し，$\sum$のような和を示す記号は，今後は省略することにする．

ここで，座標系を別のものにとりかえ，Pの新座標をx'^{μ}，またQのそれを$x'^{\mu}+\Delta x'^{\mu}$としよう．xとx'の間には

$$x'^{\mu} = f^{\mu}(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (\mu=0, \cdots, 3),$$

あるいは簡単に

$$x'^{\mu} = f^{\mu}(x)$$

という関数関係があるものとする．$f^{\mu}(x)$は$x^0, \cdots, x^3$のそれぞれについて適当な階数まで微分可能と考える．また4個の新変数x'^{μ}は互いに独立でなければならないから，$f^{\mu}(x)$は

$$\frac{\partial(x')}{\partial(x)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x'^0}{\partial x^0} & \dfrac{\partial x'^0}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x'^0}{\partial x^2} & \dfrac{\partial x'^0}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial x'^1}{\partial x^0} & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \dfrac{\partial x'^3}{\partial x^0} & \cdots & \cdots & \dfrac{\partial x'^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \neq 0$$

という条件を満足するものとする．

(2.1)によって定義された距離Δsは，わずかに離れた2点の位置だけによってきまる量で，座標系の選びかたには無関係である．これは距離という量に要請された基本的な性質である．この要請がみたされるためには，新座標系(x'-系とよぼう)から見た計量テンソル$g'_{\mu\nu}(x')$と，もとのx-系を基準にした場合

の $g_{\mu\nu}(x)$ との間に

$$g_{\alpha\beta}(x)=g'_{\mu\nu}(x')\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} \tag{2.2}$$

という関係式が成立していなければならない.

座標変換*) $x\to x'$ に対して，$g_{\mu\nu}$ の満たすべき(2.2)という関係式と同じような関係を満足する量を，テンソル(厳密にいえば，2階共変テンソル)とよぶ. $g_{\mu\nu}$ 自身が計量テンソルとよばれるのは，それが(2.2)を満足するからである. なおついでに

$$g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu}=\delta^{\mu}{}_{\nu}=\begin{cases}1: & \mu=\nu\text{のとき}\\ 0: & \mu\neq\nu\text{のとき}\end{cases}$$

という関係をみたす $g^{\mu\lambda}(=g^{\lambda\mu})$は，2階反変テンソルとよばれる.

一般相対論にでてくるスカラー，ベクトル，テンソルといった量の定義は，形の上ではすべて特殊相対論にでてくる同じ名前の量の定義とまったく同じである. ただ注意すべき違いがひとつある.

例として，ベクトルの定義を考えよう. 座標変換 $x\to x'$ に対して4個の量 $A^{\mu}(x)$ が $A'^{\mu}(x')$ に変わるとき，新旧の成分の間に

$$A'^{\mu}(x')=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}A^{\nu}(x) \tag{2.3}$$

という関係が成立するとき，A^{μ} を反変ベクトルと名づける.

ところで特殊相対論では，$x\to x'$ は Lorentz 変換であるから，定義(2.3)の右辺で A^{ν} の係数は x に無関係な定数の係数となる. したがって，異なる世界点 P, Q におけるベクトルの和，あるいは差

$$A^{\mu}(\mathrm{P})\pm A^{\mu}(\mathrm{Q}) \tag{2.4}$$

も反変ベクトルである.

これに反して，一般相対論では，x'^{μ} は $(x^0,\cdots,x^3)$ の1次式とはかぎらないから，$\partial x'^{\mu}/\partial x^{\nu}$ は一般には x の関数となり，点 P と Q では，その値が異なる. したがって(2.4)のような量は，一般座標変換に対しては，(2.3)のようなきれいな線型同次変換をしない. つまり(2.4)のような組合せは，ベクトルとはな

*) 本書では A を B に変換することを $A\to B$ のように→で示す.

らないから注意を要する．このような事情はテンソル量についても同様で，別別の点における同種のテンソルの和や差は，テンソルにはならない．ただスカラーだけは例外で，異なる点 P, Q におけるスカラーの和や差もまたスカラーとなる．

それゆえ，隣接した2点における量の差をあつかう微分演算は，一般相対論では，特に気をつけねばならない．この点については後で再び述べることにして，本書では，テンソル解析についてはこれ以上の説明は省略する．なぜならば，微積分以外の演算は，特殊相対論における演算規則と同じものであると考えて差し支えないからである．

2.2　一般相対性原理と等価原理

一般相対論は二つの原理から出発する．そのひとつは**一般相対性原理**とよばれるもので，これを数学的にいえば，**すべての物理法則は，これを数式で表わすとき，任意の座標変換に対して，その形式が不変である**という要請になる．これをさらに簡潔にいえば**すべての物理法則は，テンソル式で書き表わされる**ということになる．

もう一つの原理は**等価原理**である．それは**物理現象を記述するための基準となる座標系を適当にとれば，時空内の任意の点で，その点の近所に着目するかぎり，そこの重力を局部的に消し去ることが必ずできる**という主張である．

たとえば地球の重力場内にある質点でも，重力の作用のもとに自由落下している箱の中に設けた直交座標系を基準にとれば，箱と一緒に自由落下している箱の中の質点は，あたかも無重力地帯を外力の作用なしに自由に運動しているように見える．これをみかけの無重力地帯とは考えず，箱の中の人にとっては，狭い箱の中が現実に無重力地帯であり，単に力学現象にとどまらず，他のすべての物理現象に対しても重力の作用が消え去っているという主張が等価原理の意味することである．要するに，等価原理によれば，重力は，ちょうど遠心力などと同じように，見る人によって存在したり，また消滅したりするということになる．

ここで，実験的に確立されているものとして**重力がない所では特殊相対論が厳密になりたつ**という主張を第三の原理として採用する．以上三つの原理をも

とにして，一般相対論がどのように組み立てられるかを，これから簡単な例で実演してみせることにしよう．

2.3　質点の運動方程式

まず重力の影響下にある質点の運動方程式を求めてみよう．地球重力の作用をうけて自由落下するエレベーター，ならびにその中でエレベーターと一緒に自由落下する質点を考えよう．エレベーターの中に設けた直交座標軸(これを X-系とよぼう)を基準にとった場合の質点の座標を X^μ，また任意の他の座標系，たとえば地上に固定した座標軸(これを x-系とよぼう)を基準にしたときの質点の座標を x^μ とする．X-系は無重力系，すなわちこれから眺めればエレベーターの内部は無重力地帯であるが，x-系から見れば，エレベーターの内部にも，地球の重力の作用はもちろん，現存する．

X-系を基準にとれば，上述の第三の原理により，自由に運動する質点の運動方程式は，特殊相対論の教えに従い

$$\frac{d^2X^\mu}{d\tau^2}=0 \tag{2.5}$$

となる．τ は質点の**固有時**で，それが $\Delta\tau$ だけ進む間に質点の座標が X^μ から $X^\mu+\Delta X^\mu$ に変わったとすると，

$$c\Delta\tau=|\Delta s|=\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\Delta X^\mu\Delta X^\nu} \tag{2.6}$$

という関係がなりたつ．ここで $\eta_{\mu\nu}$ は

$$\eta_{\mu\nu}\overset{d}{\equiv}\begin{cases}1: & \mu=\nu=1,2,3 \text{ のとき},\\ 0: & \mu\neq\nu \text{ のとき},\\ -1: & \mu=\nu=0 \text{ のとき}\end{cases}$$

である．

この質点のふるまいを x-系から見れば，それは地球重力の作用のもとに，次第に落下速度を増大しながら自由落下を続けている．その様子を表わす公式は，(2.5)を x-系の量を用いて書き表わすことにより求められる．

(2.5)は

$$\frac{d}{d\tau}\left[\frac{\partial X^\mu(x)}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right]=0$$

であるから，簡単な計算により，これは

$$\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}+\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}=0 \tag{2.7}$$

となる．ここで $\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}$ とは

$$\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}\overset{d}{\equiv}\frac{\partial x^\nu}{\partial X^\lambda}\frac{\partial^2 X^\lambda}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}=\Gamma^\nu{}_{\beta\alpha} \tag{2.8}$$

という量である．

固有時 τ の定義(2.6)は，x-系から見ると

$$c\Delta\tau=|\Delta s|=\sqrt{-g_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha\Delta x^\beta} \tag{2.6$'$}$$

となる．

$$\Delta X^\mu=\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha}\Delta x^\alpha$$

という関係を用いれば，Δs が座標変換に対して，その値を変えないという要請：

$$\Delta s^2=\eta_{\mu\nu}\Delta X^\mu\Delta X^\nu=g_{\alpha\beta}\Delta x^\alpha\Delta x^\beta$$

から，

$$g_{\alpha\beta}=\eta_{\mu\nu}\frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\beta} \tag{2.9}$$

という関係式が導かれる．これは，(2.2)で x'-系のかわりに X-系とすれば，容易に求められる．

(2.8)で定義された $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ は，(2.9)に与えられた $g_{\alpha\beta}$ や，その微分を用いると以下のように書き表わされる：

$$\left.\begin{aligned}\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}&\overset{d}{\equiv}g^{\mu\nu}\Gamma_{\nu,\alpha\beta},\\ \Gamma_{\nu,\alpha\beta}&=\frac{1}{2}(g_{\nu\alpha,\beta}+g_{\beta\nu,\alpha}-g_{\alpha\beta,\nu})\end{aligned}\right\}. \tag{2.10}$$

ここで $g_{\alpha\beta,\nu}$ は $\partial g_{\alpha\beta}/\partial x^\nu$ を表わす．また $g^{\mu\nu}$ は

$$g^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial x^\mu}{\partial X^\alpha}\frac{\partial x^\nu}{\partial X^\beta} = g^{\nu\mu} \tag{2.11}$$

である*)．これが

$$g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^\mu{}_\nu$$

を満足することは，容易に確かめられよう．

さて，(2.7) は重力の作用を受けて自由落下を続ける質点の運動方程式である．これは任意に選んだ座標系 (x-系) を基準にとった場合の運動方程式で，これが重力場内におかれた自由粒子の運動方程式の一般的な形である．

これに対して (2.5) は，特別な座標系，つまり無重力系 (X-系) から眺めた場合の運動方程式で，そこでは $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ が 0 となっているために，簡単な形をしている．この事実から $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ は重力を表わす量であると想像される．

2.4　Newton の運動方程式との比較

上に述べた想像の正しいことは，つぎのようにして証明される．いま一般座標系 (x-系) と X-系との違いはあまり大きくなく，その結果，x-系の計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は，X-系の $\eta_{\mu\nu}$ と，ごくわずかしか違わないものとして，

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x) \tag{2.12}$$

とおく．ここで

$$|h_{\mu\nu}(x)| \ll 1$$

と仮定する．

また x-系から眺めたとき，質点の速さ v は光速 c よりはるかに小さく

$$|h_{\mu\nu}(x)| = O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^2\right) \ll 1 \tag{2.13}$$

とする．

ここで x^0 を ct と書くとき，上の仮定から

$$ct \overset{d}{\equiv} x^0 \approx X^0 = cT$$

だから，t は特殊相対論にでてくる時間 T と近似的に同じものと考えてよい．

---

*)　$\eta^{\alpha\beta}$ の定義は $\eta_{\alpha\beta}$ のそれと同じである．$\eta^{\alpha\gamma}\eta_{\gamma\beta} = \delta^\alpha{}_\beta$ が成り立つ．

ここでさらに，$h_{\mu\nu}$ は x^0 に無関係，つまり，静的としよう．

以上の仮定が許される場合には，$\mu=1,2,3$ に対して(2.7)は

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2}=\frac{c^2}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^\mu},\quad (\mu=1,2,3) \tag{2.7$'$}$$

となる．

一方，Newton の静的重力ポテンシャルを ϕ とすれば，その影響下にある質点の(Newton の)方程式は

$$\frac{d^2x^\mu}{dt^2}=-\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu},\quad (\mu=1,2,3).$$

そこで，Einstein の運動方程式が，近似的に Newton のそれと一致するためには

$$h_{00}(x)=-\frac{2}{c^2}\phi(x) \tag{2.14}$$

という関係が成立すればよい．あるいは上述の仮定が成立するような座標系(x-系)では

$$g_{00}\approx-\left(1+\frac{2}{c^2}\phi\right) \tag{2.15}$$

という関係が近似的に成りたつとすれば，Einstein の運動方程式は Newton のそれと一致する．

(2.7)′ の右辺は(2.7)の $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ から導かれたもので，$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}$ が重力を表わすという想像の正しかったことは，これで示されたといえよう．

(2.7)の $\mu=0$ にあたる式は

$$\frac{d}{d\tau}\left[\left\{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2-h_{00}\right\}^{-1/2}\right]-\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k}\frac{dx^k}{d\tau}=0$$

となる．ここで(2.14)を承認し，また質点の慣性質量を m とすれば，上の式に mc^2 をかけることにより

$$mc^2+\frac{1}{2}mv^2+m\phi=\text{一定}$$

という結果が求まる．これは重力場内にある質点の全エネルギーの保存則にほかならない．

ところで(2.15)は非常に重要なことを表わしている．すなわち $g_{\mu\nu}$ という10個の関数は，時空内の隣接する2点の間の距離を定義するという役割のみならず，時空的に分布する重力のポテンシャルを表わすという大切な役目ももっているということである．$g_{\mu\nu}$ がこのように二重の役割をもつということは，一般相対論の特徴で，Einstein の重力論が，物理学の幾何学化とよばれるのもまさにこの点によるといえよう．

ここで x-系から，他の任意の座標系(x'-系とよぼう)に乗りかえたとき，重力 $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ がどのように変換されるかを調べてみよう．

(2.8)の x を x' におきかえれば，x'-系における $\Gamma'^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ が求められる：

$$\Gamma'^{\mu}{}_{\alpha\beta}(x')=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial X^{\lambda}}\frac{\partial^2 X^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha}\partial x'^{\beta}}. \tag{2.8$'$}$$

これと，もとの $\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta}$ との関係が

$$\Gamma'^{\mu}{}_{\alpha\beta}=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}\frac{\partial x^{a}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial x^{b}}{\partial x'^{\beta}}\Gamma^{\nu}{}_{ab}+\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\frac{\partial^2 x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha}\partial x'^{\beta}} \tag{2.16}$$

となることは容易に証明できよう．

Γ と Γ' の関係は Γ について線型同次式とはならず，(2.16)の右辺の第2項のような，Γ に無関係な量が顔を出す．この特異な付加項のために，適当な座標変換を行なうと，時空内の任意の1点で，そこの $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ をすべて0とすることが必ず可能となる．Γ が重力を表わすという解釈を思いおこすとき，少なくとも1点において，Γ のすべての成分を消去できるという事実は，まさに等価原理の主張の数学的表現であるといえよう．なお Γ と Γ' の関係が線型同次式ではないということは，Γ がテンソルではないことを示すものである．この $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ を数学では**接続係数**とよぶ．

2.5　一般相対性理論への書替え

これまで述べたことから，一般相対論における物理法則の導き方の手順は，だいたい理解してもらえたと思うが，ここでその手順をもう一度総括する．

まず無重力系を用意し，それを基準としたとき，ある物理量がベクトル $\bar{A}^{m}(X)$ で表わされるとする．これを一般座標系(x-系)から眺めれば，ベクトルの変換則に従って

$$A^\mu(x)=\frac{\partial x^\mu}{\partial X^m}\bar{A}^m(X)$$

という量で表わされる．また X-系における計量テンソル η_{mn} は，x-系では

$$g_{\mu\nu}(x)=\eta_{mn}\frac{\partial X^m}{\partial x^\mu}\frac{\partial X^n}{\partial x^\nu} \tag{2.9}$$

となる．

一般にベクトルやテンソルの変換則を用いれば，X-系における量から x-系のそれを導くことは，上の二つの例のように，きわめて容易にできる．

そこで，これからベクトル $\bar{A}^m(X)$ の微分 $\partial\bar{A}^m(X)/\partial X^n$ が，x-系ではどのような量になるかを調べてみよう．上述の一般的な処方に従い，求める x-系の量を

$$\nabla_\nu A^\mu(x)\overset{d}{\equiv}\frac{\partial X^n}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\mu}{\partial X^m}\frac{\partial\bar{A}^m(X)}{\partial X^n} \tag{2.17}$$

とかく．

この右辺は

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial X^m}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left\{\frac{\partial X^m}{\partial x^\rho}A^\rho(x)\right\}$$

とかけるから，$\nabla_\nu A^\mu$ は

$$\nabla_\nu A^\mu(x)\overset{d}{\equiv}\frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x^\nu}+\frac{\partial x^\mu}{\partial X^m}\frac{\partial^2 X^m}{\partial x^\nu\partial x^\rho}A^\rho(x)$$

となる．ここで Γ の定義(2.8)を用いると

$$\nabla_\nu A^\mu(x)\overset{d}{\equiv}\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu}+\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}A^\rho \tag{2.17$'$}$$

という式が導かれる．

$\nabla_\nu A^\mu$ の定義式(2.17)から容易にわかるように，座標変換 $x\to x'$ に対して，この量は

$$\nabla'_\nu A'^\mu(x')=\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\nabla_\beta A^\alpha(x) \tag{2.18}$$

という変換則を満足する．つまり $\nabla_\nu A^\mu$ は，その添字が示すようなテンソルである．この事実は，Γ の変換則(2.16)を思いおこすとき，定義式(2.17)$'$ から

も証明できる．なお，すでに述べたように，$\partial A^\mu/\partial x^\nu$ だけでは，一般座標変換 $x\to x'$ に対して，テンソルとはならない．(2.17)′ のように，これにさらに Γ に比例する項をつけ加えてはじめてテンソルができあがる．$\nabla_\nu A^\mu$ を A^μ の**共変微分**という．

A^μ のかわりに，共変ベクトル B_μ の場合には

$$\nabla_\nu B_\mu \overset{d}{\equiv} \frac{\partial B_\mu}{\partial x^\nu} - \Gamma^\rho{}_{\nu\mu} B_\rho \tag{2.19}$$

となる．またスカラーに対しては，

$$\nabla_\nu S \overset{d}{\equiv} \partial_\nu S.$$

すなわち共変微分は普通の微分と同じものになる．

最後に共変微分は，普通の微分と同様に，分配則を満足する：

$$\nabla_\nu (A^{\cdots}_{\cdots} B^{\cdots}_{\cdots}) \overset{d}{\equiv} (\nabla_\nu A^{\cdots}_{\cdots}) B^{\cdots}_{\cdots} + A^{\cdots}_{\cdots} (\nabla_\nu B^{\cdots}_{\cdots}).$$

以上に述べた書替えの手順をまとめるとつぎのようになる．

$$X^\mu \to x^\mu, \qquad \eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}(x), \qquad \eta^{\mu\nu} \to g^{\mu\nu}(x),$$

$$\bar{A}^{\cdots}_{\cdots}(X) \to A^{\cdots}_{\cdots}(x), \qquad \frac{\partial \bar{A}^{\cdots}_{\cdots}}{\partial X^\nu} \to \nabla_\nu A^{\cdots}_{\cdots}(x).$$

この一覧表で→の左側の量は無重力系から見た量，右側のものは，それを一般座標系から眺めた量である．

上表の対応の例として，

$$\frac{\partial \eta_{\mu\nu}}{\partial X^\lambda} = 0 \ \to\ \nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0.$$

この右側(x-系)の式を詳しく書けば

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \Gamma^\rho{}_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} - \Gamma^\rho{}_{\lambda\nu} g_{\mu\rho} = 0. \tag{2.10$'$}$$

これは Γ の定義(2.10)からも容易に導くことができる．

ついでに下の式も書きそえておこう．

$$\frac{\partial \eta^{\mu\nu}}{\partial X^\lambda} = \ 0 \ \to\ \nabla_\lambda g^{\mu\nu} = \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\lambda\rho} g^{\rho\nu} + \Gamma^\nu{}_{\lambda\rho} g^{\mu\rho} = 0. \tag{2.10$''$}$$

上の対応表の応用として，もうひとつ，重要な例，すなわち，重力の影響下におかれた電磁場の方程式を求めてみよう．

無重力系から眺めたときの電場の強さ $\vec{E}(X)$ と，磁束密度 $\vec{B}(X)$ を一緒にして反対称テンソル $\bar{f}_{\mu\nu}(X)\,(=-\bar{f}_{\nu\mu})$ で表わす：

$$\bar{f}_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}\bar{f}_{00}\;\bar{f}_{01}\cdots\bar{f}_{03}\\ \bar{f}_{10}\cdots & \\ \vdots & \\ \bar{f}_{30}\cdots\cdots\bar{f}_{33}\end{pmatrix}\overset{d}{\equiv}\begin{pmatrix}0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c\\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y\\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x\\ E_z/c & B_y & -B_x & 0\end{pmatrix}.$$

また電荷密度 ρ，電流密度 $\vec{j}$ を一緒にして

$$\bar{j}^\mu=(\bar{j}^0,\bar{j}^1,\bar{j}^2,\bar{j}^3)\overset{d}{\equiv}(c\rho,j_x,j_y,j_z)$$

とすれば，X-系から見た Maxwell の方程式は

$$\frac{\partial\bar{f}^{\alpha\beta}}{\partial X^\beta}=\mu_0\bar{j}^\alpha,\qquad \frac{\partial\bar{f}_{\lambda\mu}}{\partial X^\nu}+\frac{\partial\bar{f}_{\mu\nu}}{\partial X^\lambda}+\frac{\partial\bar{f}_{\nu\lambda}}{\partial X^\mu}=0. \tag{2.20}$$

ここで μ_0 は真空の透磁率，また $\bar{f}^{\alpha\beta}$ は

$$\bar{f}^{\alpha\beta}\overset{d}{\equiv}\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}\bar{f}_{\mu\nu}.$$

(2.20) に対応する一般系の方程式は

$$\left.\begin{aligned}\nabla_\beta f^{\alpha\beta}=\mu_0 j^\alpha,\qquad \nabla_\nu f_{\lambda\mu}+\nabla_\lambda f_{\mu\nu}+\nabla_\mu f_{\nu\lambda}=0,\\ f^{\alpha\beta}=g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}f_{\mu\nu}\end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

である．しかし $\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}=\Gamma^\mu{}_{\beta\alpha}$ という特殊事情のために上の第二組の式は

$$\frac{\partial f_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}+\frac{\partial f_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}+\frac{\partial f_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu}=0 \tag{2.21$'$}$$

という簡単な形になる．

最後に，質量が m，電荷 e をもつ質点が，与えられた電磁場および重力場の双方の作用のもとに運動しているとき，その運動方程式を求めてみよう．

まず，質点の近傍に，局所的無重力系を設ければ，そこでは，運動方程式は

$$m\frac{d^2\overline{X}^\mu}{d\tau^2}=e\bar{f}^{\mu\nu}\frac{d\overline{X}^\lambda}{d\tau}\eta_{\nu\lambda}$$

となる．この右辺は質点に働く Lorentz 力を示す．

これを一般の座標系から見れば

$$m\left(\frac{d^2x^\mu(\tau)}{d\tau^2}+\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau}\right)=ef^{\mu\nu}\frac{dx^\lambda}{d\tau}g_{\nu\lambda} \tag{2.22}$$

となる．$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}, f^{\mu\nu}, g_{\nu\lambda}$ はすべて質点の存在する世界点におけるこれらの量の値

を表わすことはいうまでもない.

2.6　本物の重力場と見掛けの重力場

座標系を適当にとれば，時空内の任意の 1 点で，そこの重力を消し去ることが必ずできることはすでに述べた．これは等価原理の主張することである．しかしもし，1 点のみならず，有限のひろがりをもつ時空内の一部の領域にわたって，そこのすべての点で重力が一挙に消え去るように，うまい具合に座標系を選ぶことができるときは，その領域内には本物の重力場は存在しないと考えるべきである．かりに，具合の悪い座標系を採用したために，その領域内に重力が存在するように見えたとしても，そのような重力はみかけの重力場というべきである.

いま時空内のある領域 Ω の中で，座標系 (x'-系) を上手に選んだ結果，Ω の中のいたる所で $\Gamma'^{\mu}{}_{\alpha\beta}(x')$ の全成分が 0 になったとしよう.

ここで以後の説明を容易にするために，まず Γ の変換則 (2.16) を少しかきかえておこう．(2.16) の右辺第 2 項は

$$-\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}\right)\frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\beta}}$$

のようにかきかえることができる.

いま (4×4) 行列 $\boldsymbol{T}$ の (α, β) 要素を

$$(\boldsymbol{T})^{\alpha}{}_{\beta} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \tag{2.23}$$

と定義する．この逆行列 $\boldsymbol{T}^{-1}$ は，容易にわかるように

$$(\boldsymbol{T}^{-1})^{\beta}{}_{\alpha} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}$$

である．これにならって，4 個の (4×4) 行列 $\boldsymbol{\Gamma}_{\mu}$ $(\mu=0, \cdots, 3)$ の (α, β) 要素を

$$(\boldsymbol{\Gamma}_{\mu})^{\alpha}{}_{\beta} \overset{d}{\equiv} \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} \tag{2.24}$$

と定義する.

これらの行列を使うと (2.16) は，次のようになる.

$$\boldsymbol{\Gamma}'_{\alpha} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\alpha}}\left\{\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Gamma}_{\beta}\boldsymbol{T}^{-1} - \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}\right\} \tag{2.16$'$}$$

そこで話をもとにもどして，Ω の全域で $\boldsymbol{\Gamma}'_\alpha$ が 0 となるためには，(2.16)′ から

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Gamma}_\beta\boldsymbol{T}^{-1}-\frac{\partial}{\partial x^\beta}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}=0,$$

あるいは方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{T}}{\partial x^\mu}=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\Gamma}_\mu \tag{2.25}$$

の解 $\boldsymbol{T}$ が存在する必要がある．

そのためには，Ω の内部で，(2.25) に対する積分可能の条件

$$\partial_\mu\partial_\nu\boldsymbol{T}=\partial_\nu\partial_\mu\boldsymbol{T} \tag{2.26}$$

が満足されねばならない．

(2.26) の両辺を (2.25) を用いてかきかえると*)

$$\boldsymbol{R}_{\mu\nu}=-\boldsymbol{R}_{\nu\mu}\overset{d}{\equiv}\partial_\mu\boldsymbol{\Gamma}_\nu-\partial_\nu\boldsymbol{\Gamma}_\mu+[\boldsymbol{\Gamma}_\mu,\boldsymbol{\Gamma}_\nu]=0 \tag{2.26$'$}$$

という等式が成立することが必要となる．

(2.26)′ は，Ω の内部のすべての点で Γ' を 0 にさせるような座標系，x'-系が存在するための必要条件である．逆に (2.26)′ がみたされれば，そのような x'-系を求めることが可能である．そのときは (2.10)′ により，$\partial g'_{\mu\nu}/\partial x'^\lambda$ も Ω 内部のいたる所で 0 となる．つまり $g'_{\mu\nu}$ は x' に無関係な定数となるから，さらに x' に適当な一次変換をほどこして，Ω 内に Minkowski 型の座標系を設置できる．このようにして Ω 内部には重力のまったく存在しないことが一目でわかるようにすることができる．

要するに重力場がみかけのものであるための必要十分条件は

$$\boldsymbol{R}_{\mu\nu}=0 \tag{2.26$'$}$$

である．逆にいえば，本物の重力場の存在する領域では $\boldsymbol{R}_{\mu\nu}\neq 0$ となる．

$\boldsymbol{R}_{\mu\nu}$ を行列要素を用いてかくと

$$(\boldsymbol{R}_{\mu\nu})^\alpha{}_\beta\overset{d}{\equiv}\partial_\mu\Gamma^\alpha{}_{\nu\beta}-\partial_\nu\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}+\Gamma^\alpha{}_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\nu\beta}-\Gamma^\alpha{}_{\nu\sigma}\Gamma^\sigma{}_{\mu\beta}\overset{d}{\equiv}R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}. \tag{2.27}$$

(2.27) によって定義された $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ を **Riemann–Christoffel の曲率テンソル**という．これがテンソルであることは，すぐ後で示す．

---

*) $[\boldsymbol{\Gamma}_\mu,\boldsymbol{\Gamma}_\nu]$ は $\boldsymbol{\Gamma}_\mu\boldsymbol{\Gamma}_\nu-\boldsymbol{\Gamma}_\nu\boldsymbol{\Gamma}_\mu$ を表わす．

$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ がテンソルであるということは大変重要である．いま，ある座標系を基準にとったとき，$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ の各成分がすべて 0 になったとすれば，この性質は，座標変換をしても，そのまま保持される．これは $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ と大きく違う点である．ある 1 点で Γ の成分がすべて 0 という主張は，座標系のとり方に依存するから，これによって重力の真贋を識別するわけにはいかない．

重力がみかけのものか否かを判断するのに，曲率テンソル $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ の成分がすべて 0 となるか否かという識別法を採用することは，それが座標系の採り方に無関係な客観性を持つことを思えば，まことに当を得たものといえよう．

2.7 曲率テンソル

ここで曲率テンソルのもつ重要な性質を概説しよう．

任意のベクトル A^{α} に対し

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]\, A^{\alpha} = \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}A^{\alpha} - \nabla_{\nu}\nabla_{\mu}A^{\alpha} = R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}A^{\beta} \tag{2.28}$$

という関係が成り立つことは容易にたしかめることができる．この左辺は 3 階のテンソルである．したがって，右辺の係数 $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ は 4 階のテンソルでなければならない．

ところで

$$\{[\nabla_{\lambda}, [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]] + [\nabla_{\mu}, [\nabla_{\nu}, \nabla_{\lambda}]] + [\nabla_{\nu}, [\nabla_{\lambda}, \nabla_{\mu}]]\}\, A^{\alpha} \equiv 0 \tag{2.29}$$

という恒等式が，任意の A^{α} に対して成立することは，左辺の [,] をほぐしてみれば容易にわかる．この左辺各項の共変微分を，面倒をいとわず計算してみよう．

まず (2.28) から

$$\nabla_{\lambda}[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]\, A^{\alpha} = \nabla_{\lambda}R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\cdot A^{\beta} + R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\cdot\nabla_{\lambda}A^{\beta}.$$

一方

$$[\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]\nabla_{\lambda}A^{\alpha} = R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\cdot\nabla_{\lambda}A^{\beta} - R^{\tau}{}_{\lambda\mu\nu}\cdot\nabla_{\tau}A^{\alpha}.$$

そこで

$$[\nabla_{\lambda}, [\nabla_{\mu}, \nabla_{\nu}]]A^{\alpha} = \nabla_{\lambda}R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\cdot A^{\beta} + R^{\tau}{}_{\lambda\mu\nu}\cdot\nabla_{\tau}A^{\alpha}.$$

これを (2.29) に代入し，λ, μ, ν を順に置きかえると，(2.29) は

$$(\nabla_{\lambda}R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} + \nabla_{\mu}R^{\alpha}{}_{\beta\nu\lambda} + \nabla_{\nu}R^{\alpha}{}_{\beta\lambda\mu})A^{\beta}$$
$$+ (R^{\tau}{}_{\lambda\mu\nu} + R^{\tau}{}_{\mu\nu\lambda} + R^{\tau}{}_{\nu\lambda\mu})\nabla_{\tau}A^{\alpha} \equiv 0.$$

$A^\beta, \nabla_\tau A^\alpha$ の各成分はまったく独立に，任意の値をとりうるから，

$$\nabla_\lambda R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + \nabla_\mu R^\alpha{}_{\beta\nu\lambda} + \nabla_\nu R^\alpha{}_{\beta\lambda\mu} \equiv 0, \tag{2.30}$$

および

$$R^\tau{}_{\lambda\mu\nu} + R^\tau{}_{\mu\nu\lambda} + R^\tau{}_{\nu\lambda\mu} \equiv 0 \tag{2.31}$$

という恒等式が導かれる．(2.30)を **Bianchi の恒等式**という．

ここで

$$R_{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} R^\alpha{}_{\nu\mu\alpha} = \partial_\mu \Gamma^\alpha{}_{\alpha\nu} - \partial_\alpha \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}\Gamma^\beta{}_{\nu\alpha} - \Gamma^\alpha{}_{\alpha\beta}\Gamma^\beta{}_{\mu\nu} \tag{2.32}$$

というテンソルを定義しよう．

(2.32)の右辺第1項は，添字(μ, ν)について一見，非対称に見えるが実は対称である．これを証明するには，まず(2.10)を用いて

$$\Gamma^\alpha{}_{\alpha\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\nu g_{\alpha\beta}.$$

一方，$g_{\alpha\beta}$ の行列式を g(これは常に<0)とかくと

$$\frac{\partial g}{\partial x^\nu} = g \cdot g^{\alpha\beta} \partial_\nu g_{\alpha\beta}$$

という公式がなりたつ．そこで

$$\partial_\mu \Gamma^\alpha{}_{\alpha\nu} = \partial_\mu \partial_\nu (\log \sqrt{-g}).$$

したがって(2.32)の右辺は，どの項も皆，μ, ν のいれかえに対して対称である．$R_{\mu\nu}(=R_{\nu\mu})$ を **Ricci のテンソル**という．

$R_{\mu\nu}$ からさらに

$$R \overset{d}{\equiv} g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{2.33}$$

というスカラーが作られる．この R を**スカラー曲率**という．

ここで $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ の添字に関する対称性について一言ふれておこう．

まず

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} \overset{d}{\equiv} g_{\alpha\gamma} R^\gamma{}_{\beta\mu\nu}$$

とおくと，添字の置換に対してつぎのような関係が存在する：

$$\left.\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= R_{\mu\nu\alpha\beta}, \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -R_{\beta\alpha\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}. \end{aligned}\right\} \tag{2.34}$$

テンソルの添字の置換に対する(2.34)のような対称性は，座標変換をしても，そのまま保持される．そこで(2.34)という関係を証明するには，つぎのような

特別な座標系を用いてたしかめれば十分である．

いま時空内の任意の 1 点 P において

$$g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu},\qquad g^{\mu\nu}=\eta^{\mu\nu},$$
$$\partial_\lambda g_{\mu\nu}=\partial_\lambda g^{\mu\nu}=0$$

となるような座標系を採用しよう(これは $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}=0$, すなわち無重力系である)*⁾.

この場合には，点 P において $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ は [注：$g_{\alpha\nu,\beta\mu}\overset{d}{\equiv}\partial^2 g_{\alpha\nu}/\partial x^\beta\partial x^\mu$]

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}(\mathrm{P})=\frac{1}{2}(g_{\alpha\nu,\beta\mu}-g_{\beta\nu,\alpha\mu}-g_{\alpha\mu,\beta\nu}+g_{\beta\mu,\alpha\nu})$$

となる．これを見れば(2.34)の成りたつことが一目でわかる．

(2.34)を用いると，$R_{\mu\nu}$ は

$$R_{\mu\nu}=g^{\beta\alpha}R_{\beta\nu\mu\alpha}=g^{\alpha\beta}R_{\alpha\mu\nu\beta}=R_{\nu\mu}$$

となるから，$R_{\mu\nu}$ の (μ,ν) に関する対称性も容易にわかる．

ところで恒等式(2.31)は，$R_{\alpha\beta\mu\nu}$ のいろいろな成分の間に，多数の関係が存在することを示す．しかし実際にはただ 1 個の関係を除いて，他はすべて(2.34)の示す関係に還元される．(2.31)の教える関係のうちで，(2.34)とは独立なものは

$$R_{0123}+R_{0231}+R_{0312}\equiv 0 \tag{2.31$'$}$$

だけである．(2.34)および(2.31)′ を考えにいれると，$R_{\alpha\beta\mu\nu}$ の独立な成分の数は 20 個となる．

ここで後に必要となる重要な恒等式について述べよう．(2.30)の ν を α とおいて，α について 0 から 3 まで和をとる．それに $g^{\lambda\beta}g^{\mu\rho}$ をかけ，さらに(2.10)″ を思いおこすと

$$\nabla_\lambda\left(R^{\lambda\rho}-\frac{1}{2}g^{\lambda\rho}R\right)\equiv 0$$

となる．あるいは

$$G_{\mu\nu}\overset{d}{\equiv}R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \tag{2.35}$$

とおけば

$$\nabla_\mu G^{\mu\nu}\equiv 0. \tag{2.36}$$

---

*⁾　このような座標系を**点 P における測地系**とよぶ．

(2.35)で定義された $G_{\mu\nu}$ を **Einsteinのテンソル**という．(2.36)は重力場の方程式を導く際に，重要な水先案内の役割をはたした恒等式である．

2.8　重力場の方程式

重力場内にある質点の運動方程式(2.7)や，重力の影響下にある電磁場の方程式(2.21)において，そこに出てきた重力ポテンシャル $g_{\mu\nu}$ は，それが x のどんな関数であるかは，あらかじめわかっているものとした．それでは $g_{\mu\nu}$ はどのようにしてきめられるのか？　これを決定するものが重力場の方程式である．

Newtonの重力論では，重力の源となる物質の質量密度(例えば太陽のガスの質量密度) $\rho(x)$ があらかじめ与えられているとき，Newtonの重力ポテンシャル ϕ は

$$\varDelta\phi = 4\pi G\rho \tag{2.37}$$

により決定される．ここで G は万有引力定数である．

一般相対論でも，10個の成分をもつ**Einsteinの重力ポテンシャル** $g_{\mu\nu}$ は，その源となる物質の**エネルギー・運動量テンソル** $T^{\mu\nu}$ $(=T^{\nu\mu})$ が与えられているとき，つぎの方程式の解として決定される：

$$R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \kappa T^{\mu\nu}. \tag{2.38}$$

この式を**Einsteinの重力場の方程式**という*)．κ はEinsteinの重力定数とよばれ，後に説明するように

$$\kappa = \frac{8\pi}{c^4}G = 2.07\times10^{-48}\,\mathrm{s^2\cdot cm^{-1}\cdot g^{-1}}$$

である．

(2.38)を導くのには，以下のような考察がその根拠となった．

まず未知関数は10個の対称テンソル $g_{\mu\nu}$ であるから，これを規定する方程式も10個必要である．さらに物理法則は，一般相対性原理によれば，テンソル式で表わされなければならないから，求める方程式は2階対称テンソルの等式

$$F^{\mu\nu} = M^{\mu\nu} \tag{2.39}$$

---

*) 本書では $T^0{}_0$ がエネルギー密度を示すものとする．

という形であればよい.

すでに質点の運動方程式(2.7)の解説の際に述べたように，ある特別な情況(p.12参照)のもとでは(2.15)のような関係が成立する．この事実と(2.37)をあわせ考えると，$F^{\mu\nu}$ は $g_{\alpha\beta}$ の2階微分までを含むテンソルでなければならない.

さらに(2.39)と(2.37)を比べれば，(2.39)の右辺の $M^{\mu\nu}$ は重力の源となる物質に関係する量であり，上述のような特別な情況下では，或る特別の成分だけが ρ に比例する量として生き残り，他の成分は無視できる程に小さな量となると推測される．そのような $M^{\mu\nu}$ としては

$$M^{\mu\nu}=\alpha\rho u^{\mu}u^{\nu}. \tag{2.40}$$

あるいはもっと一般化して，物質のもつエネルギー・運動量テンソル(今後はエネルギー・テンソルと略称しよう.) $T^{\mu\nu}$ を用いて

$$M^{\mu\nu}=\alpha T^{\mu\nu} \tag{2.40$'$}$$

とすればよい.

(2.40)あるいは(2.40)$'$ の α は比例定数，$\rho(x)$ は物質の質量密度を示すスカラー量，u^{μ} は，点 x にある物質の小部分の四元速度を示す．物質の速さ $|\vec{v}|$ が光速 c より遥かに小さいときは，$M^{\mu\nu}$ のうち，M^{00} 以外は無視できる程度に小さくなる.

(2.40)または(2.40)$'$ を採用すると，$M^{\mu\nu}$ はエネルギー・運動量の保存則を満足しなければならない．それは，無重力系では，前述の第3の原理により，特殊相対論と同様に，つぎの形に書きあらわされる：

$$\frac{\partial}{\partial X^{\nu}}\overline{M}^{\mu\nu}(X)=0.$$

$\overline{M}^{\mu\nu}(X)$ は，点 X の近所に設けた無重力系から眺めた場合の物質のエネルギー・テンソルを示す.

これを一般系(x-系)から見ると

$$\nabla_{\nu}M^{\mu\nu}(x)=0 \tag{2.41}$$

となる．これが(2.39)と矛盾しないためには，任意の $g_{\alpha\beta}$ に対し

$$\nabla_{\nu}F^{\mu\nu}\equiv 0 \tag{2.42}$$

という恒等式が成立する必要がある．ここでもし $\equiv 0$ のかわりに $=0$ とすれば，

(2. 42) は $g_{\alpha\beta}$ に対する方程式となるから，$g_{\alpha\beta}$ をきめる方程式の数が多過ぎて具合がわるい．

ところで，$g_{\alpha\beta}, \partial g_{\alpha\beta}/\partial x^\lambda, \partial^2 g_{\alpha\beta}/\partial x^\lambda \partial x^\tau$ だけから構成されている 2 階対称テンソルで，任意の点 x における測地系から眺めたとき，それが $\partial^2 g_{\alpha\beta}/\partial x^\lambda \partial x^\tau$ の 1 次式となり，さらに恒等式(2. 42)を満足するものは

$$F^{\mu\nu} = G^{\mu\nu} - \lambda g^{\mu\nu} \qquad (\lambda \text{ は定数})$$

だけしかないことが証明されている．

そこで重力場の方程式の最も一般的なものは

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R - \lambda g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu} \tag{2. 38$'$}$$

ということになる．

λ は**宇宙定数**とよばれ，宇宙論的考察から $1/\sqrt{\lambda}$ は宇宙半径程度の巨大な数であることがわかっている．この事実から，λ は

$$\lambda \approx 10^{-57} \sim 10^{-54}\ \mathrm{cm}^{-2}$$

という非常に小さな定数となる．それゆえ，本書では今後は λ-項を無視し，重力場の方程式としては(2. 38)とする．

さて(2. 38)は次にのべるような情況のもとでは，予想通り，Newton の重力場の方程式(2. 37)と一致することが証明できる．

まず，p. 12 に述べた条件(2. 12)がみたされるものとしよう．ここで重力の源である物質塊の運動はごく緩慢で，その各部分の速さ v は $|v| \ll c$ とする．したがってそれの生み出した重力場は時間 $x^0 = ct$ には無関係と仮定する．

ところで(2. 38)に $g_{\mu\nu}$ をかけると

$$-R = \kappa g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \kappa T$$

となるから，(2. 38)を

$$R_{\mu\nu} = \kappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T\right) \tag{2. 38$''$}$$

とかきかえることもできる．

(2. 38)$''$ の (0, 0) 成分は，$h_{\alpha\beta}$ の 2 次以上を無視すると

$$\frac{1}{2} \Delta h_{00} = \kappa\left(T_{00} - \frac{1}{2} \eta_{00} T\right).$$

$T_{\mu\nu}$ は $|v| \ll c$ という仮定から

$$T_{\mu\nu} \stackrel{d}{\equiv} -\rho u_\mu u_\nu = \begin{cases} -\rho c^2 & : \quad \mu=\nu=0, \\ O(c\cdot v) & : \quad \mu=0, \nu=1, 2, 3, \\ O(v^2) & : \quad \mu, \nu=1, 2, 3. \end{cases}$$

そこで上の方程式は近似的に

$$\frac{1}{2}\varDelta h_{00} = \frac{1}{2}\kappa T_{00}.$$

これに(2.14)を代入すると

$$\varDelta\phi = (1/2)\kappa c^4 \rho.$$

そこで

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4}$$

とおけば，(2.37)と一致する．

すでに述べたように，みかけだけの重力か，それとも本物の重力かを識別するには，20 個の独立な成分をもつ曲率テンソルが 0 か否かを調べればよい．

Einstein の方程式によれば，物質(電磁場も含む)のエネルギー・テンソルが 0 でなければ，曲率テンソルの 20 個の成分の適当な一次式である 10 個の量 $G_{\mu\nu}$ が 0 とはならないから，必ず，物質の存在する領域やその周辺には本物の重力場が存在することになる．

2.9 Hamilton の原理

重力場の方程式(2.38)や質点の運動方程式(2.7)は，Hamilton の原理に従い，変分法を用いて導くこともできる．この途中の計算は後に必要となるので，以下にそれを説明しよう．

ここでは N 個の質点が一方では重力場の源となって，その周囲に重力場を生み出すとともに，他方では，仲間の質点の作り出した重力場の影響を受けて運動しているという物理系を考えよう．ここで，ある質点の作る重力場が，その質点自身に及ぼす作用が無限大になるという厄介な問題があるが，これは物質粒子を大きさのない点とみなすという簡素化をした報いとして，目をつぶることにする．

i 番目 $(i=1,2,\cdots,N)$ の質点の座標を $z^\mu(\tau_i)$ あるいは略して $z^\mu(i)$, 固有時を τ_i, またその質量を m_i とすると，この物理系の全作用積分 I はつぎのようになる：

$$I=I_1+I_2.$$

ここで I_1 は

$$I_1=-\sum_{i=1}^{N}m_ic\int\sqrt{-g_{\mu\nu}(i)\dot{z}^\mu(i)\dot{z}^\nu(i)}d\tau_i. \tag{2.43}$$

$\dot{z}^\mu(i)$ は $dz^\mu(\tau_i)/d\tau_i$ を表わす．また $g_{\mu\nu}(i)$ とは $g_{\mu\nu}\{z(i)\}$ のことである．この I_1 は次のようにかくこともできる：

$$I_1=-\sum_{i=1}^{N}m_ic\iint\sqrt{-g_{\mu\nu}(x)\dot{z}^\mu(i)\dot{z}^\nu(i)}\delta^4\{x-z(i)\}d\tau_id^4x. \tag{2.43$'$}$$

I_2 はつぎの量である：

$$I_2=-\frac{1}{2c\kappa}\int\mathfrak{R}d^4x=-\frac{1}{2c\kappa}\int\sqrt{-g}\cdot Rd^4x. \tag{2.44}$$

一般にテンソルに $\sqrt{-g}$ のかかった量を**テンソル密度**とよび，それをもとのテンソルと区別するために花文字で表わすことにする．特に上にでてきた $\mathfrak{R}$ のように，スカラー R に $\sqrt{-g}$ のかかった量を**スカラー密度**とよぶ．

座標変換 $x\to x'$ に対してスカラーは

$$R(x)=R'(x')$$

であるが，スカラー密度は，$\sqrt{-g}$ という量がついているために

$$\mathfrak{R}'(x')=\mathfrak{R}(x)\frac{\partial(x^0,\cdots,x^3)}{\partial(x'^0,\cdots,x'^3)}\ , \tag{2.45}$$

あるいは簡単に

$$=\mathfrak{R}(x)\frac{\partial(x)}{\partial(x')}$$

という関係をみたす．(2.45) から

$$\mathfrak{R}'(x')d^4x'=\mathfrak{R}(x)d^4x=\text{スカラー} \tag{2.45$'$}$$

となる．したがって I_2 は，任意の座標変換に対してその値が不変，つまりスカラーである．

さて (2.43) の $z^\mu(i)$ に対する変分を計算してみよう．ここで τ_i が i 番目の粒子の固有時であることに留意すると

$$\sqrt{-g_{\mu\nu}(i)\dot{z}^{\mu}(i)\dot{z}^{\nu}(i)}=\frac{ds_i}{d\tau_i}=c$$

となるから，$\frac{d}{d\tau_i}(1/\sqrt{\quad})$ は0となる．τ 積分の両端では $\delta z=0$ とすると

$$\delta I_1=-\sum_i m_i\int[\ddot{z}^{\lambda}(i)+\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}(i)\dot{z}^{\alpha}(i)\dot{z}^{\beta}(i)]g_{\lambda\mu}(i)\delta z^{\mu}(i)d\tau_i$$

となる．したがって Hamilton の原理により

$$\ddot{z}^{\lambda}(i)+\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta}(i)\dot{z}^{\alpha}(i)\dot{z}^{\beta}(i)=0 \tag{2.7}$$

という運動方程式が導かれる．

つぎに $g_{\mu\nu}$ の変分，およびそれに伴う $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ の変分により I にどのような変分が生まれるかを考えよう．ここでも $g_{\mu\nu}$，したがってまた $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ の変分は I の積分域の表面上で0になるものと仮定する．

まず I_2 の変分は次のようになる：

$$\begin{aligned}\delta I_2=-\frac{1}{2c\kappa}\int\{&R_{\mu\nu}\delta(\sqrt{-g}\cdot g^{\mu\nu})\\ &-\partial_{\mu}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\alpha}+\partial_{\alpha}(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\\ &+\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(2\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta}\delta\Gamma^{\beta}{}_{\nu\alpha}-\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}\delta\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta}-\Gamma^{\beta}{}_{\alpha\beta}\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu})\}d^4x.\end{aligned}$$

この右辺第2，第5項を一緒にすると，p. 21 の $\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\alpha}$ に関する公式

$$\partial_{\mu}\sqrt{-g}=\sqrt{-g}\cdot\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\sigma}$$

を用いて

$$-\sqrt{-g}(\partial_{\mu}g^{\mu\nu}+\Gamma^{\sigma}{}_{\mu\sigma}g^{\mu\nu}+\Gamma^{\nu}{}_{\rho\sigma}g^{\rho\sigma})\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\nu\alpha}$$

となる．この(　)の中は(2.10)″により0となる．

まったく同様に，第3, 4, 6項を一緒にすると

$$\sqrt{-g}(\partial_{\alpha}g^{\mu\nu}+\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}g^{\beta\nu}+\Gamma^{\nu}{}_{\alpha\beta}g^{\beta\mu})\delta\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu}.$$

これも(2.10)″のために0となる．そこで結局 δI_2 は第1項だけとなる．

ここで

$$\delta g=g\cdot g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta},\qquad \delta g^{\mu\nu}=-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\delta g_{\alpha\beta} \tag{2.46}$$

という公式を使うと

$$\delta I_2=\frac{1}{2c\kappa}\int\sqrt{-g}G^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}d^4x \tag{2.47}$$

となる．

つぎに I_1 の変分を求めよう．$g_{\mu\nu}$ の変分を扱うときは(2. 43)′ を用いるほうが便利である：

$$\delta I_1 = \sum_{i=1}^{N} m_i c \int \frac{\dot{z}^\mu(i)\dot{z}^\nu(i)\delta^4\{x-z(i)\}}{2\sqrt{-g_{\alpha\beta}(i)\dot{z}^\alpha(i)\dot{z}^\beta(i)}} \delta g_{\mu\nu}(x) d\tau_i d^4x. \qquad (2.48)$$

この分母は

$$\sqrt{\quad} = \frac{ds_i}{d\tau_i} = c$$

だから，結局

$$\delta I = \frac{1}{2c\kappa}\int\left[\sqrt{-g}G^{\mu\nu} + \kappa\int\sum_{i=1}^{N} m_i c\dot{z}^\mu(i)\dot{z}^\nu(i)\delta^4\{x-z(i)\}d\tau_i\right]\delta g_{\mu\nu}d^4x.$$

そこで Hamilton の原理により

$$\sqrt{-g}G^{\mu\nu}(x) = -\kappa\sum_{i=1}^{N} m_i \int \dot{z}^\mu(i)\dot{z}^\nu(i)\delta^4\{x-z(i)\}cd\tau_i. \qquad (2.49)$$

この右辺をみやすい形に書き表わそう．まず点 x(これを P とよぼう)は第 1 番目の粒子の描く世界線のごく近くにあるものとする．これから $z(1)$ のかわりに z とかくこととし，しばらくは粒子の番号は省略する．

いま x-系にかわって，点 P における測地系(無重力系，これを $\bar{x}$-系とする)を採用しよう．点 P を $\bar{x}$-系の原点にとれば，$\bar{x}$-系から見た P の座標は，もちろん $\bar{x}^\alpha=0\,(\alpha=0, \cdots, 3)$ である．また $\bar{x}$-系から見たとき粒子 1 の座標を $\bar{z}^\mu$ とする．いま $\bar{x}^0=0$ の瞬間，$\bar{x}$-系から見た粒子 1 の速度が 0 とする．すなわち，$\bar{x}$-系が，この瞬間に粒子 1 の静止系となるように $\bar{x}$-系を選ぶ．

このような場合には，(2. 49) の右辺で，0 でない項は $i=1$ の項だけとなる．ところで

$$\delta^4(x-z) = \delta^4(\bar{x}-\bar{z})\frac{\partial(\bar{x})}{\partial(x)} \qquad (2.50)$$

という公式がある．そこで (2. 49) の右辺の 0 でない項は

$$= -\kappa m\int \dot{z}^\mu\dot{z}^\nu\delta^3(\bar{x}-\bar{z})\cdot\delta(\bar{x}^0-\bar{z}^0)\frac{\partial(\bar{x})}{\partial(x)}cd\tau$$

$$= -\kappa m\dot{z}^\mu\dot{z}^\nu\delta^3(\bar{x}-\bar{z})\frac{\partial(\bar{x})}{\partial(x)}$$

となる．ここで $d\bar{z}^0=cd\tau$ という関係を使った．

ところで(2.9)の無重力系 X のかわりに，ここで考えている $\bar{x}$ を用いれば

$$g(x)=\det\{g_{\mu\nu}(x)\}=\det\left(\frac{\partial\bar{x}^m}{\partial x^\mu}\right)\cdot\det(\eta_{mn})\cdot\det\left(\frac{\partial\bar{x}^n}{\partial x^\nu}\right)=-\left\{\frac{\partial(\bar{x})}{\partial(x)}\right\}^2.$$

つまり

$$\frac{\partial(\bar{x})}{\partial(x)}=\sqrt{-g(x)} \tag{2.51}$$

となる．

そこで(2.49)の右辺は

$$-\kappa m\delta^3(\bar{x}-\bar{z})\dot{z}^\mu\dot{z}^\nu\sqrt{-g(x)}$$

となる．

ここでスカラー $\rho(x)$ を

$$\rho(x)=\bar{\rho}(\bar{x})\overset{d}{\equiv}m\delta^3(\bar{x}-\bar{z}) \tag{2.52}$$

と定義する．$\bar{\rho}(\bar{x})$ は，点 P を原点とする無重力系で，さらに $\bar{x}^0=0$ の瞬間に，粒子 1 の静止系となるような特別な座標系($\bar{x}$-系)から眺めた場合の粒子の質量密度を示す．

これを用いて

$$T^{\mu\nu}(x)\overset{d}{\equiv}-\rho(x)\dot{z}^\mu\dot{z}^\nu \tag{2.53}$$

とおけば，(2.49)は予想通り

$$\sqrt{-g(x)}G^{\mu\nu}(x)=\kappa\sqrt{-g(x)}T^{\mu\nu}(x)$$

となる．(2.53)で定義された $T^{\mu\nu}$ は，$\bar{x}$-系では

$$\bar{T}^0{}_0(\bar{x})=-\bar{\rho}(\bar{x})\dot{\bar{z}}^0\dot{\bar{z}}_0=m\delta^3(\bar{x}-\bar{z})c^2$$

となる．つまり(2.38)に出てきたエネルギー・テンソルの定義と一致している．

これまでの議論では，点 x(あるいは点 P)が，粒子 1 の世界線のごく近くにあると仮定した．しかし粒子 1 のかわりに，それが他の粒子であったとしても，これまでの議論はまったく同様に成りたつ．

以上で一般相対論の概説を終える．なお次の第 3, 4 章では，一般相対論をさらに拡張したものとして，二つの典型的な統一場理論について述べる．これらはいずれも後の各章を理解するのに大いに役立つと思う．

3

Weylの統一場理論

3.1　平行移動

緒論でも述べたように，重力場に対するEinstein流の考え方が大成功を収めるや，電磁場をも，それと同様の考え方で，時空の幾何学的属性を用いて表現しようという試みが理論物理学者や数学者の間に澎湃(ほうはい)として起こった．その第1号がWeylのゲージ理論[5]である．

電磁場は，第2章でも述べたように4個の成分をもつポテンシャル$A_\mu(x)$によって表現される．これを時空の幾何学的属性として扱いたくても，Einsteinの採用した4次元Riemann空間には，余分な自由度は残っていない．そこでまず，4個の新しい自由度を作り出すために，WeylがRiemann空間をどのように拡張したかについて述べよう．

Riemann空間ではベクトル$V^\mu(x)$の共変微分は

$$\nabla_\nu V^\mu \overset{d}{\equiv} \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} V^\lambda \tag{2.17$'$}$$

のように定義される．

本来，微分とは，点x，およびそれに隣接した点$x+\Delta x$におけるV^μの差

$$\Delta V^\mu(x) = V^\mu(x+\Delta x) - V^\mu(x) = \frac{\partial V^\mu(x)}{\partial x^\rho} \Delta x^\rho \tag{3.1}$$

を意味する．しかしこの中央の式は一般座標変換を扱う場合には，すでに述べたようにベクトルとはならない．

この欠点を克服するためには，同一の世界点におけるベクトルの違いを求めればよい．それには$V^\mu(x)$を，xから$x+\Delta x$まで，このベクトルの方向も大

きさも，もとのままに保ちながら移動させたものを，点 $x+\Delta x$ において，もともとそこにあった $V^{\mu}(x+\Delta x)$ と比較すればよい．

このように方向も大きさも，もとのままに移動させることを幾何学では**平行移動**という．平行移動により $x+\Delta x$ にたどりついたベクトルを $V^{\mu}(x+\Delta x)_{//}$ と書くことにしよう．

それでは $V^{\mu}(x+\Delta x)_{//}$ ともとの $V^{\mu}(x)$ との間の関係はどんなものか？　特殊相対論では簡単に両者が等しいということを，平行の定義としている．そこで，局所的無重力系（X-系）を設け，**この特別な座標系を基準にした場合にかぎり，**

$$\overline{V}^{\mu}(X+\Delta X)_{//} \overset{d}{\equiv} \overline{V}^{\mu}(X) \tag{3.2}$$

によって，平行移動を定義する（$\overline{V}^{\mu}$ は X-系から見た成分を示す）．

(3.2) を一般系（x-系）から見れば，Δx の 2 次以上を無視すると

$$V^{\mu}(x+\Delta x)_{//} = V^{\mu}(x) - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial X^{\alpha}} \frac{\partial^2 X^{\alpha}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\sigma}} \Delta x^{\rho} \cdot V^{\sigma}(x)$$

となる．

あるいは $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ の定義 (2.8) を使うと，次のようになる

$$V^{\mu}(x+\Delta x)_{//} = V^{\mu}(x) - \Delta x^{\rho} \Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma} V^{\sigma}(x). \tag{3.3}$$

そこで 2 点 x と $x+\Delta x$ における V^{μ} の差を，(3.1) の代りに

$$\Delta V^{\mu} \overset{d}{\equiv} V^{\mu}(x+\Delta x) - V^{\mu}(x+\Delta x)_{//} \tag{3.1$'$}$$

のように定義すればよい．この右辺は同一の世界点 $x+\Delta x$ におけるベクトルの差であるから，これは明らかにベクトルである．

(3.1)′ に (3.3) を代入すれば

$$\Delta V^{\mu} = \Delta x^{\rho} \left\{ \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\rho}} + \Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma} V^{\sigma} \right\} = \Delta x^{\rho} \cdot \nabla_{\rho} V^{\mu}$$

となる．このように，共変微分という演算は，平行移動という概念の上に定義されている．

以上はすべて Riemann 空間（あるいは Riemann 幾何学）における共変微分の定義である．

ベクトルを平行に移動させても，その成分が (3.3) のように，みかけの上ではもとのものと違ったものになるのは，点 x と $x+\Delta x$ では，基準となる座標軸が

別のものであるからである．これは，一般座標変換を行なうとき，二つの点における変換が同一ではないということに起因する．たとえ両点における座標軸が“同一”の方向を指すように(局所的無重力系，つまり測地系を)選んであったとしても，一般座標変換を行なった後には，この“同一”という条件は崩れてしまう(ごくわずかに離れた2点における座標系の軸の方向が“同一”とは，その点で測地系を選んだ場合を意味するものと理解する)．

ベクトルの方向，あるいは成分については，Riemann 幾何学では上述のような考え方をしているが，ベクトルの大きさについては，平行移動させても不変という要請はみたされている．なぜならばベクトルの大きさはスカラー量だから，次の一連の等式が成立するからである．

$$g_{\mu\nu}(x+\varDelta x)\cdot V^{\mu}(x+\varDelta x)_{//}\cdot V^{\nu}(x+\varDelta x)_{//}=\eta_{\mu\nu}\overline{V}^{\mu}(X+\varDelta X)_{//}\cdot\overline{V}^{\nu}(X+\varDelta X)_{//}$$
$$=\eta_{\mu\nu}\overline{V}^{\mu}(X)\overline{V}^{\nu}(X)=g_{\mu\nu}(x)V^{\mu}(x)V^{\nu}(x).$$

3.2 等長移動

ところで，時空内のすべての点で，長さの基準となる物指(ゲージ)を変更した結果，あらゆる物の長さが一律に C 倍されたとしても，物理法則にはなんらの変更も起こらない．これは次元(dimension)解析の根拠となっている事実である．

しかしもし，大きさの変更の倍率 C を時空内の各点ごとに異なってもよいとすれば，異なる世界点にある物の大きさを比較することは不可能となる．異なる2点でそれぞれの物指を用いて測定された値が等しくても，両者が同じ大きさだと速断するわけにはいかないからである．

そこで各点における長さの基準(ゲージ)を，点ごとにそれぞれ任意に採択してもよいとした場合，どのような幾何学が生まれるかを考えてみよう．このような幾何学を **Weyl の幾何学**といい，この幾何学の適用される空間を **Weyl 空間**とよぶ．

いま Weyl 空間の中の1点 P(その座標を x)から，これに隣接した点 Q($x+\varDelta x$)まで，1本の棒を，その長さが変化しないように運搬したとする(これを“**等長移動**”とよぶことにする)．いま P, Q におけるゲージがたまたま同一であることが，あらかじめ確認されているとすれば，棒の長さ $\bar{l}$ については

$$*\bar{l}(x+\Delta x)_{//}=\bar{l}(x)$$

がなりたつ．ここで￣はこの特別なゲージを用いて測った場合の棒の長さを示す．また $*\bar{l}(x+\Delta x)_{//}$ は，等長移動によりＰからＱまでたどり着いた棒をＱのゲージで測った場合の長さを示す．*の意味は少し後に説明する．

ここでゲージを変えて，点Ｐに在るすべての物の長さは $C(\mathrm{P})=\exp[\lambda(x)]$ 倍，またＱでは，$C(\mathrm{Q})=\exp[\lambda(x+\Delta x)]$ 倍されるとすれば，等長移動前後の長さの関係は

$$\begin{aligned}*l(x+\Delta x)_{//}&=\exp[\lambda(x+\Delta x)]\cdot*\bar{l}(x+\Delta x)_{//}=\exp[\lambda(x+\Delta x)]\cdot\bar{l}(x)\\&=\exp[\lambda(x+\Delta x)-\lambda(x)]\cdot l(x)\\&\approx\left(1+\Delta x^{\rho}\frac{\partial\lambda}{\partial x^{\rho}}\right)l(x)\end{aligned}$$

となる．この最後の形を手本として，等長移動による大きさのみかけの値(測定値といってもよい)の変化をつぎのように定義しよう．

いまWeyl空間内の各点におけるゲージがあらかじめきめられているとき，点 x における長さ $l(x)$ の棒を等長移動により $x+\Delta x$ まで運搬したとき，到着した棒を，点 $x+\Delta x$ におけるゲージで測った長さを

$$*l(x+\Delta x)_{//}\stackrel{d}{\equiv}\{1-\Delta x^{\rho}A_{\rho}(x)\}l(x)\tag{3.4}$$

であると定義する．つまり，点 x と，点 $x+\Delta x$ における物の長さを比べる際に，$l(x)$ に等しい長さは $*l(x+\Delta x)_{//}$ であり，それは $l(x)$ を $(1-\Delta x^{\rho}A_{\rho})$ 倍した値であるということである．

移動に伴う長さの伸縮率を表わすこの $A_{\rho}(x)$ を**ゲージ場**とよぶことにしよう．これが x のどんな関数であるかはWeyl空間の性質に結びついたもので，これこそ，Weylが欲しかった新しい4個の自由度である．$A_{\rho}(x)$ は，あらかじめ与えられている各点のゲージの定め方に依存する．各点のゲージが変更されれば，もちろん，$A_{\rho}(x)$ の関数形も変更される．このことについては後に述べる．

ここで(3.4)の応用として，ベクトル $V^{\mu}(x)$ の大きさ $V(x)$ が等長移動により，みかけの上でどのように変化するかを考えてみよう．

大きさ $V(x)$ の2乗は

$$\{V(x)\}^2=g_{\mu\nu}(x)V^{\mu}(x)V^{\nu}(x)$$

である．

この V^{μ} が x から $x+\Delta x$ まで平行移動により移された結果を $*V^{\mu}(x+\Delta x)_{//}$ とする．この節では，Weyl 空間における等長移動や平行移動に関連する量や，演算記号には，すべて＊印をつけて Riemann 幾何学における，それらに対応する量や記号と区別することとする．(3.4) の $*l(x+\Delta x)_{//}$ もこの約束に従ったものである．

$*V^{\mu}(x+\Delta x)_{//}$ を，(3.3) にならって

$$*V^{\mu}(x+\Delta x)_{//} \overset{d}{\equiv} V^{\mu}(x)-\Delta x^{\rho}\cdot *\Gamma^{\mu}{}_{\rho\sigma}(x)\cdot V^{\sigma}(x) \qquad (3.3)^*$$

と定義する．

この定義から

$$\{*V(x+\Delta x)_{//}\}^2 = g_{\mu\nu}(x+\Delta x)\cdot *V^{\mu}(x+\Delta x)_{//}\cdot *V^{\nu}(x+\Delta x)_{//}$$
$$= \{V(x)\}^2+\Delta x^{\rho}(g_{\mu\nu,\rho}-*\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\mu}g_{\lambda\nu}-*\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\nu}g_{\lambda\mu})V^{\mu}V^{\nu}+O(\Delta x^2).$$

ところでベクトルの平行移動により，その大きさ $\{V\}^2$ は等長移動をうけるから，(3.4) の l の代りに $\{V\}^2$ とおくことにより

$$\{*V(x+\Delta x)_{//}\}^2 = \{1-\Delta x^{\rho}A_{\rho}(x)\}\{V(x)\}^2. \qquad (3.5)$$

そこで両辺の Δx^{ρ} の係数を比べると

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^{\rho}}+A_{\rho}\right)g_{\mu\nu}-*\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\mu}g_{\lambda\nu}-*\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\nu}g_{\lambda\mu}=0. \qquad (3.6)$$

ここで $*\Gamma^{\lambda}{}_{\rho\mu}=*\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\rho}$ という対称条件をつければ，(3.6) は $*\Gamma$ について解くことができて

$$\left.\begin{aligned} *\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} &\overset{d}{\equiv} *\Gamma_{\rho,\alpha\beta}g^{\rho\lambda}, \\ *\Gamma_{\rho,\alpha\beta} &= \Gamma_{\rho,\alpha\beta}+\frac{1}{2}(A_{\alpha}g_{\rho\beta}+A_{\beta}g_{\rho\alpha}-A_{\rho}g_{\alpha\beta}) \\ &= \frac{1}{2}(D_{\alpha}g_{\rho\beta}+D_{\beta}g_{\rho\alpha}-D_{\rho}g_{\alpha\beta}) \end{aligned}\right\} \qquad (3.7)$$

となる．ここで D_{α} とは $\partial_{\alpha}+A_{\alpha}$ のことである．また (3.7) の＊のついていない $\Gamma_{\rho,\alpha\beta}$ は Riemann 幾何学における接続係数 (2.10) である．

つぎに各点におけるゲージの変更を考えよう．Weyl にしたがって $g_{\mu\nu}$ の変更を

$$g_{\mu\nu}(x)\rightarrow g'_{\mu\nu}(x)=e^{\lambda(x)}\cdot g_{\mu\nu}(x) \qquad (3.8)$$

とする．ここで座標 x や，上述のベクトルの成分 $V^{\mu}(x)$ は変更しない．

しかしベクトルの大きさ$\{V\}^2$は，変換(3.8)により

$$\{V(x)\}^2 \to \{V'(x)\}^2 = e^{\lambda(x)}\{V(x)\}^2 \tag{3.9}$$

のように変化する．

なお(3.8)に伴って$g^{\mu\nu}$や$\sqrt{-g}$は

$$\left.\begin{aligned} g^{\mu\nu}(x) &\to g'^{\mu\nu}(x) = e^{-\lambda(x)}g^{\mu\nu}(x) \\ \sqrt{-g(x)} &\to \sqrt{-g'(x)} = e^{2\lambda(x)}\sqrt{-g(x)} \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

のように変換される．

変換(3.8)～(3.10)を**ゲージ変換**[*]という．この変換に応じてある量$Q(x)$が

$$Q \to Q' = e^{n\lambda}\cdot Q$$

のように変換されるとき，Qをn次のゲージ可変量と呼ぶことにしよう．この定義に従えば$g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu}$はそれぞれ1次と-1次，また$\sqrt{-g}$は2次の可変量である．

ゲージ変換後の量をすべて$'$をつけて表わせば，(3.5)は

$$\{{}^*V'(x+\varDelta x)_{//}\}^2 = \{1-\varDelta x^\rho A'_\rho(x)\}\{V'(x)\}^2$$

となる．

この左辺を(3.5)を用いて書きかえれば($\varDelta x$の2次以上は省く)，

$$e^{\lambda(x+\varDelta x)}\{{}^*V(x+\varDelta x)_{//}\}^2 = e^{\lambda(x)}\{1+\varDelta x^\rho(\partial_\rho\lambda - A_\rho)\}\{V(x)\}^2.$$

これともとの式の右辺を比べれば，A_ρの変換則は

$$A_\rho \to A'_\rho = A_\rho - \partial_\rho\lambda \tag{3.11}$$

となる．

ここでいま点Pを座標原点とする座標系(x-系)を採用して，

$$A_\rho(x=0) = a_\rho$$

とおく．さらにPの近傍で，特に$\lambda(x)$が

$$\lambda(x) = a_\rho x^\rho + O(x^2)$$

とすれば，これを用いたゲージ変換により，1点Pでは

$$A'_\rho(0) = A_\rho(0) - a_\rho = 0$$

となる．これは一般相対論において，点Pにおける測地系を採用することによ

---

[*] これが本来の正しい意味でのゲージ変換である．しかし現在広く使われているこの言葉との混同を避けるために，ここに定義されている変換を**Weylのゲージ変換**，あるいは**Weyl変換**とよぶことにする．

り，P における重力 Γ をすべて 0 にすることが必ずできるという特性に対応するものである．

しかし広い範囲 Ω の全域にわたり，ゲージ変換を用いて一挙に $A_\rho(x)$ を消去することができるか否かは，(3.11) の教える

$$A_\rho(x)-\partial_\rho\lambda(x)=0$$

という方程式が $\lambda(x)$ について解けるか否かにかかっている．

これが可能なときは，A_ρ はみかけの量というべきであろう．$A_\rho(x)$ がみかけの量であるための必要十分条件は，上の λ が解をもつための条件：

$$f_{\mu\nu}(x)=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu=0$$

が Ω の中で成りたつことである．

この条件は一般相対論（あるいは Riemann 幾何学）において，重力場がみかけの場であるための必要十分条件 (2.26)′ にまさに対応するものである．

3.3 Weyl 空間の共変微分

つぎに Weyl の幾何学における共変微分を考えよう．すでに述べたように，この幾何学では，ベクトルの方向と大きさを同一に保ちながら運搬しても，そのみかけの上の値は，成分 V^μ については (3.3)* のような，またその大きさ $\{V\}^2$ については (3.5) のような変化が起こる．特に後者のような事情は Riemann 幾何学にはなかったことである．それゆえ，Weyl の幾何学においては，共変微分の定義には，方向と大きさという 2 種類の変化に気をくばらねばならない．

たとえば，(3.3)* のような平行移動の規則に従うベクトル $V^\mu(x)$ に対しては，その共変微分は Riemann 幾何学の (3.4) と同様に

$$^*\nabla_\lambda V^\mu \overset{d}{\equiv} \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\lambda}+{}^*\Gamma^\mu{}_{\lambda\rho}V^\rho \tag{3.12}$$

と定義すればよい [(3.8) の次の行で述べたように，この V^μ はゲージ不変量と約束してある]．

しかし計量テンソル $g_{\mu\nu}$ は，それが 2 階共変テンソルであるために，平行移動に対してその成分が，Riemann 幾何学と同様に，

$$g_{\mu\nu}(x)+\Delta x^\lambda({}^*\Gamma^\tau{}_{\lambda\mu}g_{\tau\nu}+{}^*\Gamma^\tau{}_{\lambda\nu}g_{\mu\tau})$$

という1次変換をうけるのみならず，さらに，各点におけるゲージの違いが原因となって，上記の10個の成分は，どれも一律に$(1-\varDelta x^\lambda A_\lambda)$倍される．これは，$V^\mu$と異なり$g_{\mu\nu}$が1次のゲージ可変量であることに起因する．

それゆえ$^*g_{\mu\nu}(x+\varDelta x)_{//}$は$\varDelta x$の1次までの近似で

$$^*g_{\mu\nu}(x+\varDelta x)_{//}\overset{d}{\equiv}(1-\varDelta x^\lambda A_\lambda)g_{\mu\nu}(x)+\varDelta x^\lambda({}^*\Gamma^\tau{}_{\lambda\mu}g_{\tau\nu}+{}^*\Gamma^\tau{}_{\lambda\nu}g_{\mu\tau}) \quad (3.13)$$

となる．

そこで$g_{\mu\nu}$の共変微分は

$$\begin{aligned}\varDelta x^\lambda\cdot{}^*\nabla_\lambda g_{\mu\nu}&=g_{\mu\nu}(x+\varDelta x)-{}^*g_{\mu\nu}(x+\varDelta x)_{//}\\&=\varDelta x^\lambda\left\{\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}+A_\lambda g_{\mu\nu}-{}^*\Gamma^\tau{}_{\lambda\mu}g_{\tau\nu}-{}^*\Gamma^\tau{}_{\lambda\nu}g_{\mu\tau}\right\}\end{aligned} \quad (3.14)$$

となる．

(3.14)の右辺と(3.6)を比べると，$g_{\mu\nu}$やA_λがどんなものであろうとも$^*\Gamma$の定義から

$$^*\nabla_\lambda g_{\mu\nu}\equiv 0 \quad (3.6)'$$

が成立することがわかる．

(3.14)の右辺の{　}に$-g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}$をかけると

$$\frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^\lambda}-A_\lambda g^{\alpha\beta}+{}^*\Gamma^\alpha{}_{\lambda\nu}g^{\nu\beta}+{}^*\Gamma^\beta{}_{\lambda\mu}g^{\alpha\mu}\equiv 0. \quad (3.15)$$

$g^{\alpha\beta}$が，反変2階テンソルで，-1次のゲージ可変量であることを考えると，(3.15)は

$$^*\nabla_\lambda g^{\alpha\beta}\equiv 0 \quad (3.15)'$$

を表わすことが容易にわかる[$^*\nabla$の一般的な定義(3.16)を参照]．

一般に$T^{\alpha\beta\cdots\gamma}{}_{\mu\nu\cdots\omega}$がテンソルで，$n$次のゲージ可変量とすれば，その共変微分の定義は

$$\begin{aligned}{}^*\nabla_\lambda T^{\alpha\beta\cdots\gamma}{}_{\mu\nu\cdots\omega}\overset{d}{\equiv}&(\partial_\lambda+nA_\lambda)T^{\alpha\beta\cdots\gamma}{}_{\mu\nu\cdots\omega}\\&+{}^*\Gamma^\alpha{}_{\lambda\tau}T^{\tau\beta\cdots\gamma}{}_{\mu\nu\cdots\omega}+\cdots+{}^*\Gamma^\gamma{}_{\lambda\tau}T^{\alpha\beta\cdots\tau}{}_{\mu\nu\cdots\omega}\\&-{}^*\Gamma^\tau{}_{\lambda\mu}T^{\alpha\beta\cdots}{}_{\tau\nu\cdots}-\cdots-{}^*\Gamma^\tau{}_{\lambda\omega}T^{\alpha\beta\cdots\gamma}{}_{\mu\nu\cdots\tau}\end{aligned} \quad (3.16)$$

とすればよい．

一般座標変換$x\to x'$に対し(3.16)は，その添字の示すようなテンソルであることが容易にわかる．またゲージ変換：

$$g_{\mu\nu} \to g'_{\mu\nu} = e^{\lambda} g_{\mu\nu},$$
$$T^{\alpha\cdots}{}_{\mu\cdots} \to T'^{\alpha\cdots}{}_{\mu\cdots} = e^{n\lambda} T^{\alpha\cdots}{}_{\mu\cdots},$$
$$A_\nu \to A'_\nu = A_\nu - \partial_\nu \lambda$$

に対しては

$$({}^*\nabla_\rho T^{\alpha\cdots}{}_{\mu\cdots})' = e^{n\lambda}({}^*\nabla_\rho T^{\alpha\cdots}{}_{\mu\cdots})$$

であることも証明できる．この証明に際して

$$^*\Gamma'^{\mu}{}_{\alpha\beta} = {}^*\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta},$$

すなわち $^*\Gamma$ がゲージ不変量であることを忘れてはならない．

(3.16)の T のかわりに $\{V(x)\}^2$ とすれば，これは1次のゲージ可変量だから

$$^*\nabla_\lambda\{V\}^2 = (\partial_\lambda + A_\lambda)\{V\}^2 \tag{3.17}$$

となる．これは $\{V(x)\}^2$ の等長移動の定義(3.5)から導かれる共変微分の公式にほかならない．

(3.16)を見れば，$^*\Gamma$ は，一般座標変換に伴う接続係数であり，A_λ はゲージ変換に伴う接続係数であることが理解されよう．そこでRiemann幾何学にならって，これら2種類の接続係数から導かれる2種類の曲率テンソルを求めてみよう．

まず $\{V\}^2$ のように，1次のゲージ可変なスカラー S を考えよう．これに(3.17)を用いると，

$$^*\nabla_\mu{}^*\nabla_\nu S = \partial_\mu({}^*\nabla_\nu S) + A_\mu({}^*\nabla_\nu S) - {}^*\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}({}^*\nabla_\lambda S).$$

そこで

$$[{}^*\nabla_\mu, {}^*\nabla_\nu]S = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)S.$$

左辺は1次のゲージ可変な2階共変テンソル，S は仮定により1次のゲージ可変スカラーだから

$$f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = -f_{\nu\mu} \tag{3.18}$$

はゲージ不変な2階共変テンソルである．これがゲージ場 A_μ に伴う曲率テンソル(これをゲージ曲率とよぶことにしよう)である．

つぎに V^μ のように，ゲージ不変な任意の反変ベクトル $W^\mu(x)$ を考えよう．この場合もRiemann幾何学にならって

$$[{}^*\nabla_\mu, {}^*\nabla_\nu]W^\alpha \overset{d}{\equiv} {}^*R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}\cdot W^\beta. \tag{3.19}$$

ここで $^*R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ は，Riemann-Christoffelの曲率テンソル $R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ と同じ形のテ

ンソルで，その中にでてきた Γ をすべて $^*\Gamma$ におきかえたものである．(3.19) から明らかなように，$^*R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ はゲージ不変な 4 階テンソルである．

Riemann 幾何学における Bianchi の恒等式に対応して，Weyl の幾何学でも，前者と同じ推論によりつぎの恒等式を導くことができる：

$$\partial_\lambda f_{\mu\nu}+\partial_\mu f_{\nu\lambda}+\partial_\nu f_{\lambda\mu}\equiv 0, \tag{3.20}$$

$$\left.\begin{aligned}&{}^*\nabla_\lambda{}^*R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}+{}^*\nabla_\mu{}^*R^{\alpha}{}_{\beta\nu\lambda}+{}^*\nabla_\nu{}^*R^{\alpha}{}_{\beta\lambda\mu}\equiv 0,\\&{}^*R^{\alpha}{}_{\lambda\mu\nu}+{}^*R^{\alpha}{}_{\mu\nu\lambda}+{}^*R^{\alpha}{}_{\nu\lambda\mu}\equiv 0.\end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

$^*R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$ の添字の対称性を調べるために

$$^*R_{\alpha\beta\mu\nu}\overset{d}{\equiv} g_{\alpha\gamma}{}^*R^{\gamma}{}_{\beta\mu\nu}$$

という 1 次のゲージ可変な 4 階共変テンソルを考えてみよう．

ゲージ変換をしても添字の対称性は変わらないし，座標変換に対しても，同様だから，任意の世界点 P で，これら両種の適当な変換を用いて，

$$A_\mu(\mathrm{P})=0,\qquad {}^*\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}(\mathrm{P})=0,\qquad g_{\mu\nu}(\mathrm{P})=\eta_{\mu\nu}$$

となるようにすれば

$$\begin{aligned}^*R_{\alpha\beta\mu\nu}=R_{\alpha\beta\mu\nu}+\frac{1}{2}(&\eta_{\alpha\nu}A_{\beta,\mu}+\eta_{\alpha\beta}A_{\nu,\mu}-\eta_{\nu\beta}A_{\alpha,\mu}\\&-\eta_{\alpha\mu}A_{\beta,\nu}-\eta_{\alpha\beta}A_{\mu,\nu}+\eta_{\mu\beta}A_{\alpha,\nu}).\end{aligned} \tag{3.22}$$

これを見れば，$^*R_{\alpha\beta\mu\nu}$ には $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ のような対称性のないことが容易にわかるであろう．

たとえば

$$^*R_{\alpha\beta\mu\nu}-{}^*R_{\mu\nu\alpha\beta}=\frac{1}{2}(g_{\alpha\beta}f_{\mu\nu}-g_{\mu\nu}f_{\alpha\beta}+g_{\alpha\mu}f_{\beta\nu}-g_{\beta\mu}f_{\alpha\nu}-g_{\alpha\nu}f_{\beta\mu}+g_{\beta\nu}f_{\alpha\mu}), \tag{3.23}$$

$$^*R_{\mu\nu\alpha\beta}=-{}^*R_{\nu\mu\alpha\beta}+g_{\mu\nu}f_{\alpha\beta}. \tag{3.23$'$}$$

また

$$^*R_{\mu\nu}\overset{d}{\equiv}{}^*R^{\alpha}{}_{\mu\nu\alpha}=R_{\mu\nu}+\left(A_{\mu,\nu}+\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}A^{\alpha}{}_{,\alpha}-\frac{1}{2}f_{\mu\nu}\right)$$

と定義すれば，（この右辺の形は特別なゲージを用いた測地系に限る）次の式が成立する：

$$^*R_{\mu\nu}-{}^*R_{\nu\mu}=-2f_{\mu\nu}. \tag{3.23$''$}$$

(3.23), (3.23)′ は，いずれもその両辺が4階共変テンソルで，また1次のゲージ可変量である．また(3.23)″ の両辺はゲージ不変な2階共変テンソルである．したがってこれらの等式は，前述のような特別なゲージを用いた測地系のみならず，任意のゲージ，任意の座標系においても成立する．

3.4 Weyl の統一場理論

さて Weyl の統一場理論では，時空を Weyl 空間とみなし，ゲージ場 A_μ を，電磁場の4元ポテンシャルと同定する．したがって，ゲージ曲率 $f_{\mu\nu}$ は電磁場の強さ $\vec{E}$ と $\vec{B}$ を表わすことになる．

一方 $g_{\mu\nu}$ は Einstein と同様に重力ポテンシャルを表わすものとする．これら両種の場のみたすべき場の方程式は，一般座標変換に対して不変であるばかりでなく，さらに，ゲージ変換に対しても不変という要請をみたすものとする．

以上が Weyl の統一場理論の基本的な考えである．しかし長さという概念が，Riemann 幾何学と異なり，不変な量でなく，ゲージ変換によって自由に変化するために，たとえば荷電粒子の運動方程式を求める際に，Einstein の考え方にまねて，最短コースをもって，粒子の軌道であると主張するわけにはいかない．なぜならば，2点間を結ぶ軌道(世界線)の長さを比較することは，Weyl 空間では意味がないからである．

さて，Hamilton の原理を用いて，上述の二つの不変性の要請をみたす場の方程式を求めるには，Lagrange 関数 $\mathcal{L}$ はゲージ不変なスカラー密度でなければならない．

ところで Weyl の統一場理論では，重力場と電磁場のみを用いて，宇宙の森羅万象を説明しようと考えた．したがって Lagrange 関数は $g_{\mu\nu}$ および A_μ あるいはそれらの微係数のみから作られるものとした．いま $\mathcal{L}=\sqrt{-g}\cdot L$ とかけば，L はスカラーで，-2 次のゲージ可変量である．$g_{\mu\nu}$, A_μ およびそれらの微分から作られる有理式でこのような変換性をもつ L として，容易に思いつくものは

$$*R_{\alpha\beta\mu\nu}{*R^{\alpha\beta\mu\nu}},\quad *R_{\mu\nu}{*R^{\mu\nu}},\quad (*R)^2,\quad f_{\mu\nu}f^{\mu\nu} \tag{3.24}$$

という4個のスカラーの和しかない．ゲージ不変という要請を満足させるためには，Einstein 型の Lagrange 関数 $\sqrt{-g}\cdot{*R}$ は失格である．

本書では，Weyl の考えを少し拡げて，$g_{\mu\nu}$ と A_μ のほかに物質場として，φ_A $(A=1,\cdots,N)$ を仲間にいれる．これは，相対性原理にしたがって，テンソルの一種とし，さらに n 次のゲージ可変量とする．しかしこれ以上に，φ_A を特定する必要はない．

そこで Lagrange 関数 $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathrm{E}}+\mathcal{L}_{\mathrm{M}}+\mathcal{L}_{\mathrm{G}}, \tag{3.25}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{E}} &= -\frac{1}{4c\mu_0}\sqrt{-g}\cdot f_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta}, \qquad (\mu_0=\text{真空の透磁率}),\\
\mathcal{L}_{\mathrm{M}} &= \mathcal{L}_{\mathrm{M}}\{\varphi_A,\ \varphi_{A,\mu},\ g_{\alpha\beta},\ g_{\alpha\beta,\mu},\ A_\alpha\},\\
\mathcal{L}_{\mathrm{G}} &= \{c_1{}^*R_{\cdots\cdot}{}^*R^{\cdots\cdot}+c_2{}^*R_{\cdot\cdot}{}^*R^{\cdot\cdot}+c_3({}^*R)^2\}\sqrt{-g},
\end{aligned}\right\} \tag{3.26}$$

とする．ここで(3.25)の右辺の三つの項はいずれも単独にゲージ不変なスカラー密度とする．なお $\varphi_{A,\mu}=\partial\varphi_A/\partial x^\mu$ はいうまでもなかろう．

場の方程式は Hamilton の原理を(3.25)に適用することにより導かれる．

いま

$$[\mathcal{L}_{\mathrm{M}}]^A \overset{d}{\equiv} \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial\varphi_A} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial\varphi_A}-\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial\varphi_{A.\mu}}\right),$$

$$[\mathcal{L}_{\mathrm{G}}]^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{G}}}{\partial g_{\mu\nu}} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{G}}}{\partial g_{\mu\nu}}-\partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{G}}}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}}\right)+\partial_\alpha\partial_\beta\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{G}}}{\partial g_{\mu\nu,\alpha\beta}}\right),$$

$$\frac{1}{c}\mathcal{J}_{\mathrm{M}}{}^\nu \overset{d}{\equiv} \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial A_\nu}, \qquad \frac{1}{c}\mathcal{J}_{\mathrm{G}}{}^\nu \overset{d}{\equiv} \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{G}}}{\partial A_\nu} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{G}}}{\partial A_\nu}-\partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{G}}}{\partial A_{\nu,\alpha}}\right)$$

という略号を使う．

さらに

$$\frac{1}{c}\mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} -2\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial g_{\mu\nu}} = -2\left\{\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial g_{\mu\nu}}-\partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial g_{\mu\nu,\alpha}}\right)\right\},$$

$$\frac{1}{c}\mathcal{T}_{\mathrm{E}}{}^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} -2\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{E}}}{\partial g_{\mu\nu}} = -\frac{\sqrt{-g}}{\mu_0 c}\left\{f^{\mu\alpha}f^\nu{}_\alpha-\frac{1}{4}g^{\mu\nu}f_{\alpha\beta}f^{\alpha\beta}\right\}$$

とする．

場の方程式は次の 3 種類である：

$$2[\mathcal{L}_{\mathrm{G}}]^{\mu\nu} = \frac{1}{c}(\mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^{\mu\nu}+\mathcal{T}_{\mathrm{E}}{}^{\mu\nu}), \tag{3.27}$$

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}f^{\mu\nu}) = -\mu_0(\mathcal{J}_{\mathrm{M}}{}^\nu+\mathcal{J}_{\mathrm{G}}{}^\nu), \tag{3.28}$$

$$[\mathcal{L}_M]^A = 0. \tag{3.29}$$

(3.27) は重力場の方程式で，この右辺の第 1 項は物質場の作る対称エネルギー・テンソル密度，第 2 項は電磁場の作るそれである．

(3.28) は Maxwell の方程式で，$\mathcal{J}_M, \mathcal{J}_G$ は物質場ならびに重力場の作る電流密度を示す*)．(3.29) は物質場の方程式である．もともとの Weyl の理論では，(3.29) のような方程式は出てこない．

ところで，(3.25), (3.26) から作られる作用積分

$$I = \int \mathcal{L} d^4x$$

が，一般座標変換のみならず，ゲージ変換に対しても不変であるために，5 種類の恒等式が導かれる．その詳細な議論については第II編に譲ることとし，ここでは必要な結果だけを下にならべよう．

まず $\mathcal{L}_M$ がゲージ不変であるという要請と，方程式 (3.29) から

$$*\nabla_\mu \mathcal{J}_M{}^\mu = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{T}_M{}^{\mu\nu} \tag{3.30}$$

という関係が導かれる．

また $\mathcal{L}_M$ がスカラー密度であるという要請から導かれる恒等式に，(3.29) および (3.30) を使うと，

$$*\nabla_\mu \mathcal{T}_M{}^{\mu\nu} = -f^\nu{}_\mu \cdot \mathcal{J}_M{}^\mu \tag{3.31}$$

が求まる．

ここで $\mathcal{T}_M{}^{\mu\nu}$ の定義から容易にわかるように，これは -1 次のゲージ可変な 2 階テンソル密度である．また $\mathcal{J}_M{}^\mu$ はゲージ不変なベクトル密度である．したがって (3.30) の左辺は次のように書きかえることができる：

$$*\nabla_\mu \mathcal{J}_M{}^\mu \to \partial_\mu \mathcal{J}_M{}^\mu.$$

さらに (3.31) の左辺は

$$*\nabla_\mu \mathcal{T}_M{}^{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{T}_M{}^{\mu\nu} - A_\mu \mathcal{T}_M{}^{\mu\nu} + *\Gamma^\nu{}_{\mu\rho} \mathcal{T}_M{}^{\mu\rho}$$

のことである．

---

*) 重力場が電荷をもつとは，まったくおかしな話である．

3.5 質点の運動方程式

物質場 $\varphi_A(x)$ を，質量が m の質点の集団とみなすことができるならば，その中の任意の 1 個の粒子の位置を $z^\mu(\tau)$，その電荷を e とするとき，その運動方程式は (3.31) から次のような形になる（その導き方は巻末の付録 A を参照されたい）：

$$\frac{d}{d\tau}(m\dot{z}^\mu)-mA_\lambda\dot{z}^\lambda\dot{z}^\mu+m\cdot{}^*\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}(z)\dot{z}^\alpha\dot{z}^\beta=ef^\mu{}_\nu(z)\dot{z}^\nu. \tag{3.32}$$

また (3.30) からは

$$\frac{de(\tau)}{d\tau}=-\frac{1}{2}mg_{\mu\nu}(z)\cdot\dot{z}^\mu\dot{z}^\nu \tag{3.33}$$

も導かれる．

(3.32), (3.33) の τ は座標変換に対して不変なパラメーターである．ところで e はゲージ不変量である（付録 A, p. 184 参照）．そこで τ を a 次のゲージ可変量とすれば，(3.32) から，m は $a-1$ 次のゲージ可変な τ の関数となる．このことは (3.33) からも導かれる．なお上の両式の・は $d/d\tau$ を示す．

(3.32) の左辺第 2 項の存在は，$m\dot{z}^\mu$ が -1 次のゲージ可変量であることに由来する．

m がゲージ可変量であることは，m を定数とみなすことを妨げる．これを可能にするには a を 1 と選べばよい．その場合には $\dot{z}^\mu$ が -1 次の可変量となる．

なお a が何であっても (3.32) から

$$\left\{\frac{d}{d\tau}-A_\lambda(z)\dot{z}^\lambda\right\}p^2=0 \tag{3.34}$$

が導かれる．ここで

$$p^2=g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu=g_{\mu\nu}(m\dot{z}^\mu)(m\dot{z}^\nu)$$

は，a の値がいくらであっても，それとは関係なく -1 次のゲージ可変なスカラー量である．

一方，e はゲージ不変量だから，これを定数とおくことは許される．その場合には，e が 0 であるなしにかかわらず，(3.33) から

$$u^2=g_{\mu\nu}(z)\dot{z}^\mu\dot{z}^\nu=0 \tag{3.35}$$

となる．

(3.35) のおかげで，特に $e=0$ の粒子の軌道は，予想通り電磁場の影響をまったく受けないことがわかる．特に m を定数とおいてよい場合には，その運動方程式は後にでてくる光線の方程式とまったく同じものになる．

(3.34) は

$$m^2\frac{du^2}{d\tau}+\left(\frac{d}{d\tau}-A_\lambda\dot{z}^\lambda\right)m^2\cdot u^2=0$$

だから，(3.35) を使うと $du^2/d\tau=0$ となる．したがって $e=$定数，$u^2=0$ とおくことは (3.32) と矛盾しない．

ここで光線の方程式を求めてみよう．まず $e=0$ とおく．さらに m を定数とおくことができるように，τ は1次のゲージ可変量とする．

そこで (3.32) の両辺を m で割り

$$\frac{d}{d\tau}\dot{z}^\mu-A_\lambda\dot{z}^\lambda\dot{z}^\mu+{}^*\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\dot{z}^\alpha\dot{z}^\beta=0. \tag{3.36}$$

また (3.33) からは (3.35)，すなわち $u^2=0$ が導かれる．

(3.36) に ${}^*\Gamma$ の定義 (3.7) を代入し，さらに (3.35) を使うと

$$\ddot{z}^\mu+\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta}\dot{z}^\alpha\dot{z}^\beta=0. \tag{3.36$'$}$$

これは Einstein の一般相対論に出てくる光線の方程式と完全に一致する．なお (3.36)$'$ は一見，ゲージ不変には見えないが，(3.35) のおかげで，

$$\frac{d}{d\tau}=e^\lambda\frac{d}{d\tau'},\qquad g_{\mu\nu}=e^{-\lambda}g'_{\mu\nu}$$

という書きかえに対して不変である．

さて Weyl のゲージ理論は，種々の興味あるアイディアをわれわれに提供してくれた．しかしこの理論はつぎのような決定的に具合の悪い点をもっているために，結局は失敗におわった．その欠点とは，われわれの時空内の各点で，基準とすべき物指，つまりゲージを決定できないということである．これは最初からわかっているといえば，それまでだが，すこし説明をしておきたい．

いまわれわれの住むこの現実の時空を Weyl 空間とみなすならば，その中の各点におけるゲージは，点ごとに任意にきめてよい．そのようにゲージをきめるとともに，時空内のゲージ場 $A_\mu(x)$ が x のいかなる関数かも決まったとしよう．そうなれば，任意の一点 P(その座標を x) にあるメートル原器 l(P) と，

P に隣接した点 Q(座標 $x+\varDelta x$) にある物指 l(Q) が等しい長さをもつか否かを判断できることになる.

いま l(Q) を Q におけるゲージで測ったとき，その長さ(これを l(Q) とする)が

$$l(\mathrm{Q})_{//}=l(\mathrm{P})\cdot\{1-\varDelta x^{\rho}A_{\rho}(x)\}$$

に等しいならば，l(Q) は l(P) と“同じ長さ”をもつと断定してよい.

このような検査をつぎつぎと繰り返しながら地球上の各点の物指を同一の長さにそろえることができれば，異った場所にある物の大きさを比較することが可能となる．しかし，上述のような操作により“同一の長さ”の定義がはたして可能であろうか？

いま P を出発点として，l(P) を地球表面にそって東へ，東へと等長移動により世界一周させて，再び P に立ちもどったとする．この場合，運搬途中の点 x における物指の長さ $l(x)$ は

$$l(x+\varDelta x)=l(x+\varDelta x)_{//}=\{1-\varDelta x^{\rho}A_{\rho}(x)\}l(x)$$

という関係式に従う．いま l の運搬コースを不変パラメーター τ を用いて $x^{\mu}(\tau)$ とすれば，上の式を解いて

$$l\{x(\tau)\}=l(\mathrm{P})\exp\left\{-\int_{0}^{\tau}A_{\rho}\dot{x}^{\rho}d\tau\right\}.$$

そこで世界一周後は

$$l(\text{一周後})=l(\mathrm{P})\exp\left\{-\oint A_{\mu}dx^{\mu}\right\}.$$

$\oint A_{\mu}dx^{\mu}$ は，物指の移動経路にそった世界一周積分を示す.

ここで地球内部の磁束密度を $\vec{B}$ とすれば，静電ポテンシャル $(-A_0)$ を 0 とするとき，Gauss の定理により上の式は次のようになる：

$$l(\text{一周後})=l(\mathrm{P})\exp\left\{-\iint\vec{B}d\vec{\sigma}\right\}. \tag{3.37}$$

$d\vec{\sigma}$ は運搬経路を含む平面で地球を輪切りにしたときの切断面の面積素片で，その方向は切断面に垂直で北向きを正とする.

(3.37) の積分は 0 とはならないから，東まわりに地球を一周するごとに物指の長さは(3.37)のような倍率で変わる．したがって点 P における 1 メートルの

物指としてどれを採用したらよいか，きめかねることになる．

このほかにもつぎのような欠点がある．一般相対論にでてきたEinsteinの重力場の方程式と同じ形の方程式

$$\sqrt{-g}({}^*R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\mu\nu}\cdot{}^*R)=\kappa\mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^{\mu\nu} \tag{3.38}$$

は，Weyl 理論では役にたたない．なぜならば上の左辺はゲージ不変だが右辺は −1 次のゲージ可変量である．

これに反して，(3.27) は，左右両辺のゲージ変換性が同一である．その意味では(3.27) は好都合だが，これは(3.38) とは異なり，$g_{\mu\nu}$ に対する4階の微分方程式である．

もし(3.38) で，定数 κ が1次のゲージ可変量ならば，(3.38) を採用することが可能となる．それには κ を x のスカラー関数としなければならない．すなわち

$$\frac{1}{c\kappa}\rightarrow\{\phi(x)\}^2>0 \tag{3.39}$$

というスカラー場でおきかえればよい．この場合，ϕ は −1/2 次のゲージ可変量としなければならない．

そこで Einstein の Lagrange 関数(2.44) に(3.39) という置きかえを施すことにより導かれる

$$\mathcal{L}_0=-\frac{1}{2}\phi(x)^2\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\cdot{}^*R_{\mu\nu} \tag{3.40}$$

という Lagrange 関数を(3.25) に追加すればよい[6]．

(3.40) は明らかにゲージ不変なスカラー密度である．なおここに新たに登場したスカラー場 $\phi(x)$ のふるまいを決める Lagrange 関数としては

$$\mathcal{L}_1=-\frac{1}{2}\sqrt{-g}\left\{g^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\phi-\frac{1}{2}A_\mu\phi\right)\left(\partial_\nu\phi-\frac{1}{2}A_\nu\phi\right)+\lambda\phi^4\right\} \tag{3.41}$$

が最も容易に思いつくものである．λ はゲージ不変な定数である．この $\mathcal{L}_1$ がゲージ不変なスカラー密度であることはすぐにわかるであろう．

3.6　ゲージ理論の新解釈[7)]

統一場理論として，Weyl が最初に考えたものの概要は以上の通りである．その後 Heisenberg や Schrödinger たちにより量子力学が提唱されるや，Weyl はもともとのゲージ理論を撤回し，荷電粒子の状態関数 Ψ の位相の不確定性に目をつけた．

そして長さの基準が時空内の各点で任意に変更されてもよいというゲージ不変の原理のかわりに，Ψ の位相を，各点ごとに任意に変更しても物理法則は不変であるという要請を原理として採用した．

すなわち任意のスカラー関数 $\lambda(x)$ を用いて

$$\Psi(x) \to \Psi'(x) = \exp[-ie\lambda(x)/\hbar]\cdot\Psi(x) \tag{3.42}$$

という変換を考えた（e は，Ψ が表わす粒子の電荷を示す）．

一方，Ψ で表わされる荷電粒子が電磁場と相互作用している場合には，4 元運動量を表わす量子力学的演算子 $\boldsymbol{p}_\mu$ は次のように書きかえられる：

$$\boldsymbol{p}_\mu\Psi = -i\hbar\partial_\mu\Psi \to (\boldsymbol{p}_\mu - eA_\mu)\Psi = -i\hbar\left(\partial_\mu - i\frac{e}{\hbar}A_\mu\right)\Psi. \tag{3.43}$$

ここで，変換(3.42)に伴って

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\lambda \tag{3.42$'$}$$

という変換を同時に行なえば，

$$(\boldsymbol{p}_\mu - eA_\mu)\Psi \to (\boldsymbol{p}_\mu - eA'_\mu)\Psi' = \exp[-ie\lambda/\hbar]\cdot(\boldsymbol{p}_\mu - eA_\mu)\Psi$$

となる．

ここで $\Psi(x)$ を，点 x から $x+\Delta x$ まで“同じ位相”のまま移動させ，目的地 $x+\Delta x$ に到着した Ψ を，$x+\Delta x$ における位相の基線を基準として書き表わしたものを $\Psi(x+\Delta x)_{//}$ とする．これと，もとの $\Psi(x)$ との関係を

$$\Psi(x+\Delta x)_{//} \stackrel{d}{\equiv} \left(1 + i\frac{e}{\hbar}\Delta x^\mu A_\mu(x)\right)\Psi(x)$$

と定義すれば，Ψ の共変微分 $\mathcal{D}_\mu\Psi$：

$$\begin{aligned}\Delta x^\mu \mathcal{D}_\mu\Psi(x) &\stackrel{d}{\equiv} \Psi(x+\Delta x) - \Psi(x+\Delta x)_{//} \\ &= \Delta x^\mu\left(\partial_\mu - i\frac{e}{\hbar}A_\mu\right)\Psi\end{aligned}$$

は(3.43)の一番右の数式と同じものになる．

変換(3.42),(3.42)′をWeylは，あらためてゲージ変換と名づけた．ゲージ変換のこのような新解釈により，もともとのWeylの統一場理論に顔を出した欠点はすべて消え去ったが，それと同時に，電磁場と時空の幾何学との結びつきもまったく捨て去られた．

4
Kaluza-Klein の 5 次元統一場理論

4.1　5 次元時空

Kaluza は，時空を 5 次元の Riemann 空間と考えた．しかし，われわれの感覚では，それは 4 次元の多様体である．経験とのこのくい違いを克服するために，「すべての物理量は，5 次元空間の中で，あるひとつの特別な方向に向って物理系を推移させても，その値が変らない」という条件をつけ加えた．

これはちょうど，われわれの 4 次元時空で，静的状態にある物理系の姿に似ている．静的状態にある物理系では，4 次元時空の中で，時間軸の方向に物理系を推移させても，物理量の値は変化しない．この場合，その系に属する物理量は，空間的位置の関数ではあるが，時間には無関係である．

しかし時空の内部はこのような状態の物理系ばかりで満たされているわけではない．静的でない物理系ももちろん存在する．時間軸の方向に推移するとともに物理量の値の変化する非静的な物理系が存在するからこそ，われわれは時間の存在を知るわけである．

これに対して Kaluza の 5 次元論[8]では，現実の宇宙全体を，5 次元時空の中のある特別な方向に向って推移させても，宇宙の各点の時刻と場所をそれぞれ固定しておけば，そこには何の変化も観測されない．上述の静的状態の話とは異なり，Kaluza の理論では，宇宙のすべての場所，すべての時刻において，いわば，“あの世” に向っての推移が行なわれているにもかかわらず，われわれの “この世” には何の変化も起こらないから，この推移，あるいは “あの世” という新しい自由度の存在を知る手がかりが全くないことになる．

しかし 4 次元時空のベクトルが，一見それとは全く無関係と思っていたある

スカラーと一緒になって，実は5次元世界の1個のベクトルであるということも考えられる．この場合には，“あの世”の存在の証拠として，上述のスカラーが，われわれの眼前に存在していることになる．もしそれに気づけば宇宙に対する理解が，今よりもっと明解なものとなるのに，われわれは，惜しいことに，それに気づかないということもありうる．Kaluza の考えた世界はこのようなものと思えばよい．

さて，これから Kaluza の理論の概要を説明するために記号について約束しよう．5次元 Riemann 空間の中に適当に座標軸を設け，それを基準にして空間内の点の位置を座標 $x^i\,(i=0,1,2,3,4)$ で表わす．この節では，ラテン字の添字は0～4を示すものと約束する．

隣接した2点，x^i と $x^i+\varDelta x^i$ の間の距離は

$$\varDelta\sigma^2(x) \stackrel{d}{\equiv} \gamma_{ik}(x)\varDelta x^i \varDelta x^k \tag{4.1}$$

で与えられる．添字に関する和の約束は，ラテン字の場合には0から4までの和をとるものとする．

ところで上述の条件にしたがって，すべての物理量は

$$x^i \to x^i + \varepsilon\xi^i(x) \tag{4.2}$$

という無限小移動に対してその値が変化しないとする．$\xi^i(x)$ は時空内で，点の移動を表わす大きさ1のベクトル，ε は無限小のパラメーターである．

そこで距離 $\varDelta\sigma$ も，物理量と同様に

$$\varDelta\sigma^2(x+\varepsilon\xi) = \varDelta\sigma^2(x)$$

を満足しなければならない．すなわち

$$\gamma_{ik}(x+\varepsilon\xi)\varDelta(x^i+\varepsilon\xi^i)\varDelta(x^k+\varepsilon\xi^k) = \gamma_{ik}(x)\varDelta x^i \varDelta x^k.$$

この等式を ε の1次までの近似でかくと，$\varDelta\xi^i = \xi^i{}_{,l}\cdot\varDelta x^l$ だから

$$\gamma_{ik,l}\xi^l + \gamma_{lk}\xi^l{}_{,i} + \gamma_{li}\xi^l{}_{,k} = 0, \tag{4.3}$$

あるいは

$${}^5\nabla_i\xi_k + {}^5\nabla_k\xi_i = 0. \tag{4.4}$$

ここで $\xi^i{}_{,l}$ は $\partial\xi^i/\partial x^l$ を，$\gamma_{ik,l}$ は $\partial\gamma_{ik}/\partial x^l$ を表わす．また

$${}^5\nabla_i\xi_k \stackrel{d}{\equiv} \frac{\partial\xi_k}{\partial x^i} - {}^5\Gamma^l{}_{ik}\xi_l,$$

$$
\begin{aligned}
{}^5\Gamma^l{}_{ik} &\overset{d}{\equiv} \frac{1}{2}\gamma^{lj}(\gamma_{ji,k}+\gamma_{jk,i}-\gamma_{ik,j}) \\
&\overset{d}{\equiv} \gamma^{lj}\cdot{}^5\Gamma_{j,ik},
\end{aligned}
$$

という記号も使った．Γ や ∇ の左肩の5という添字は5次元計量テンソル γ_{ik} から作られる接続係数や，またそれを使った5次元共変微分を表わす．計量テンソルの微分と接続係数の間の関係は，5次元 Riemann 空間でも，4次元空間の場合とまったく同じ形のものがなりたつ．

(4.4)は一般相対論でよく知られた**Killingの方程式**である．またその解であるベクトル $\xi^i(x)$ は **Killingのベクトル**と呼ばれる．

ここで座標軸を上手に選んで，ベクトル $\xi^i(x)$ が x^4 軸の接線ベクトルと一致するように選ぶことができるものとする．つまり

$$\xi^i(x) = \delta^i{}_4 \tag{4.5}$$

というベクトルが(4.4)の解であるとする．

このような解が存在するためには，計量テンソル γ_{ik} はどんなものであればよいかを調べてみよう．

まず(4.5)から

$$\xi_i(x) = \gamma_{ik}(x)\delta^k{}_4 = \gamma_{i4}(x). \tag{4.5$'$}$$

これを(4.4)に，あるいは(4.5)を(4.3)に代入すると

$$\frac{\partial\gamma_{ik}(x)}{\partial x^4} = 0. \tag{4.6}$$

つまり，物理系の各点の$(x^0, \cdots, x^3)$座標はそのままにして，系全体を x^4 軸の方向に移動させても，物理量の値が不変となるためには，γ_{ik} は x^4 に依存しないことが必要である．この結論は，考えてみれば，当然のことといえよう．あらゆる物理量に x^4 が含まれないからこそ，x^4 座標の存在にわれわれは気づかないというわけである．

次にベクトル ξ^i の大きさが1ということは

$$\gamma_{ik}\xi^i\xi^k = \gamma_{44}(x) = 1 \tag{4.7}$$

ということになる．

これから，よけいな x^4 座標を特別扱いするために，

ラテン添字は0, 1, 2, 3, 4　　　ギリシャ添字は0, 1, 2, 3

を表わすものとする.

また同じ添字が上下二カ所にでてくる場合の和の約束について，ラテン字ならすでに述べたように0から4まで，またギリシャ字なら0から3までの和をとるものとする．なお x^μ は，われわれの現実の4次元時空の中の位置座標をも表わすものと考える．なお記号や文字について，この節で述べる約束は，ただこの節だけにかぎることはいうまでもない.

これから $d\sigma^2$ のかきかえをしよう．上述の約束にしたがって

$$d\sigma^2 = \gamma_{44}(dx^4)^2+2\gamma_{\mu 4}dx^4 dx^\mu+(\gamma_{\mu 4}dx^\mu)^2+(\gamma_{\mu\nu}-\gamma_{\mu 4}\gamma_{\nu 4})dx^\mu dx^\nu.$$

いま，未定の定数係数 α を用いて

$$\left.\begin{aligned} \alpha A_\mu &\overset{d}{\equiv} \gamma_{\mu 4} = \gamma_{4\mu}, \\ g_{\mu\nu} &\overset{d}{\equiv} \gamma_{\mu\nu}-\gamma_{\mu 4}\gamma_{\nu 4} \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

とおけば(4.7)を使って

$$d\sigma^2 = (dx^4+\alpha A_\mu dx^\mu)^2+g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{4.9}$$

となる.

ここで見やすいように(4.8)を下のように書く.

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} &\overset{d}{\equiv} g_{\mu\nu}+\alpha^2 A_\mu A_\nu, \\ \gamma_{\mu 4} &\overset{d}{\equiv} \gamma_{4\mu}=\alpha A_\mu, \\ \gamma_{44} &\overset{d}{\equiv} 1. \end{aligned}\right\} \tag{4.8$'$}$$

また γ_{ik} の逆行列 γ^{ik} は，その定義

$$\gamma^{il}\gamma_{lk} = \delta^i{}_k$$

から，次のようになる.

$$\left.\begin{aligned} \gamma^{\mu\nu} &\overset{d}{\equiv} g^{\mu\nu}, \\ \gamma^{\mu 4} &\overset{d}{\equiv} \gamma^{4\mu} = -\alpha A^\mu, \\ \gamma^{44} &\overset{d}{\equiv} 1+\alpha^2 A_\mu A^\mu. \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

本節では，どんな物理量でも，それを5次元空間のテンソル量と考えて，その添字(ラテン字)を上げ下ろしするときは，それぞれ γ^{ik}，および γ_{ik} を用いる．しかし同じ物理量でも，それを4次元時空のテンソルとみなすときは，添字(ギリシャ字)の上げ下ろしは $g^{\mu\nu}$，$g_{\mu\nu}$ による.

例

$$\gamma_{ik}\cdot {}^5\Gamma^k{}_{mn} \overset{d}{\equiv} {}^5\Gamma_{i,mn},$$

$$A^{\mu} \overset{d}{\equiv} g^{\mu\nu} A_{\nu}.$$

さて，条件(4.6)および(4.7)を保持する一般座標変換 $x^i \to x'^i$ は

$$\left.\begin{aligned} x^4 &= x'^4 + f^4(x'^0, \cdots, x'^3), \\ x^\mu &= f^\mu(x'^0, \cdots, x'^3) \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

という形のものにかぎられる．f^i は $x'^0 \sim x'^3$ だけの任意の関数である．

これに対して γ_{ik} は

$$\gamma'_{ik}(x') = \frac{\partial x^m}{\partial x'^i}\frac{\partial x^n}{\partial x'^k}\gamma_{mn}(x)$$

に変換される．

これを(4.8)′ のように分けてかくと

$$\left.\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x), \\ A'_\mu &= \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} A_\rho + \frac{1}{\alpha}\frac{\partial f^4}{\partial x'^\mu}, \\ \gamma'_{44} &= \gamma_{44} = 1. \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

変換(4.11)で，特に $f^4=0$ のときは，(4.12)は4次元 Riemann 空間の場合の一般座標変換にほかならない．これとは逆に $x^\mu = x'^\mu, f^4 = -\alpha\lambda(x'^0, \cdots, x'^3)$ とすれば，(4.12)は

$$\left.\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu}, \\ A'_\mu &= A_\mu - \frac{\partial\lambda}{\partial x^\mu}, \\ \gamma_{44} &= 1. \end{aligned}\right\} \tag{4.12$'$}$$

これはいわゆるゲージ変換と同じ形をしている．

そこで Kaluza は A_μ を電磁ポテンシャル，$g_{\mu\nu}$ を重力のポテンシャルと同定した．それがはたしてよいか否かは，場の方程式や荷電粒子の運動方程式をしらべることにより判明する．

そのために，まず接続係数を求めてみよう．(4.6)(4.7)という特別な事情のために，${}^5\Gamma$ はつぎのようになる：

$$\left.\begin{aligned}
{}^5\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} &= \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} - \frac{\alpha^2}{2}(f^{\lambda}{}_{\mu}A_{\nu} + f^{\lambda}{}_{\nu}A_{\mu}), \\
{}^5\Gamma^{4}{}_{\mu\nu} &= -\alpha A_{\lambda}{}^5\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} + \frac{\alpha}{2}S_{\mu\nu}, \\
{}^5\Gamma^{\lambda}{}_{\mu 4} &= {}^5\Gamma^{\lambda}{}_{4\mu} = -\frac{\alpha}{2}f^{\lambda}{}_{\mu}, \\
{}^5\Gamma^{4}{}_{\mu 4} &= {}^5\Gamma^{4}{}_{4\mu} = -\frac{\alpha^2}{2}f_{\mu\rho}A^{\rho}, \\
{}^5\Gamma^{\lambda}{}_{44} &= 0, \qquad {}^5\Gamma^{4}{}_{44} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

ここで

$$f_{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu},$$
$$S_{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \partial_{\mu}A_{\nu} + \partial_{\nu}A_{\mu}$$

である．また左肩に 5 がついていない $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ は，$g_{\mu\nu}$ とその微分から作られる 4 次元 Riemann 空間の接続係数である．

4.2 荷電粒子の運動方程式

さて電荷 e，質量 m の粒子が重力と電磁場の作用のもとにあるとき，その運動方程式を求めてみよう．質点の座標を $x^i(\tau)$ とする．τ は 5 次元座標変換に対して不変なパラメーターで，質点の 5 次元的固有時とする．

一般相対論にまねて作用積分

$$I \overset{d}{\equiv} \int \sqrt{|\gamma_{ik}\{x(\tau)\}\dot{x}^i\dot{x}^k|}\,d\tau \tag{4.14}$$

に Hamilton の原理を適用すれば，容易に

$$\frac{d}{d\tau}(\dot{x}^i) + {}^5\Gamma^{i}{}_{mn}\dot{x}^m\dot{x}^n = 0 \tag{4.15}$$

という運動方程式が導かれる．ここで $\dot{x}^m = dx^m/d\tau$ を示す．また変分に際して

$$|\gamma_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k| = \text{定数} = K^2 \tag{4.16}$$

という τ の定義が保持されるものとする．

(4.15) に (4.13) を代入し，それをわれわれになじみの深い量を用いてかきかえると，(4.15) の物理的意味が明らかになるが，それには少々面倒な計算が必要である．

そこで(4.14)を，まず(4.9)を用いて以下のようにかきかえよう：

$$I=\int\sqrt{|g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}+(\dot{x}^{4}+\alpha A_{\mu}\dot{x}^{\mu})^{2}|}\,d\tau. \tag{4.14$'$}$$

この形の I について，まず x^4 の変分を求めてみよう．(4.14)′ の被積分関数は x^4 を含まないから，変分により導かれる Euler の方程式は

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial\sqrt{|\cdots|}}{\partial\dot{x}^{4}}\right)=0,\quad \text{すなわち}\quad \frac{\partial\sqrt{|\cdots|}}{\partial\dot{x}^{4}}=\text{const.}$$

という簡単なものとなる．

(4.16)を使うと上の式は次のようになる：

$$\frac{(\dot{x}^{4}+\alpha A_{\mu}\dot{x}^{\mu})}{K}=\text{const.}$$

そこで

$$\dot{x}^{4}+\alpha A_{\mu}\dot{x}^{\mu}=\beta=\text{const.} \tag{4.17}$$

とおけば(4.16)から

$$K^{2}=|g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}+\beta^{2}|.$$

ここで τ を一般相対論にでてくる固有時と一致させるために

$$c^{2}=-g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu}=\beta^{2}\pm K^{2} \tag{4.18}$$

とおく．右辺の±は，あとできめることにする．

(4.14)′ の x^{μ} に対する変分からは

$$\ddot{x}^{\mu}+\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}=\alpha\beta f^{\mu}{}_{\nu}\dot{x}^{\nu} \tag{4.19}$$

となる．上の結果を求めるのには(4.17)が用いられている．

ここで

$$\alpha\beta=\frac{e}{m} \tag{4.20}$$

ととれば，求めるスタイルの方程式

$$\ddot{x}^{\mu}+\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\dot{x}^{\alpha}\dot{x}^{\beta}=\frac{e}{m}f^{\mu}{}_{\nu}\dot{x}^{\nu} \tag{4.19$'$}$$

が導かれる．

なお(4.18)という要請が(4.19)′ と矛盾しないことは容易にわかるであろう．

最後に(4.17)は，(4.5)で定義されたベクトル ξ^{i} を用いて

$$\beta = \gamma_{44}\dot{x}^4 + \gamma_{4\mu}\dot{x}^\mu = \xi^i \gamma_{ik}\dot{x}^k = \xi_k \dot{x}^k$$

と書くことができる.

したがって，この理論では荷電粒子の 5 次元速度ベクトル $\dot{x}^k$ の大きさは軌道に沿って一定値 K，その方向は，x^4 軸と常に一定の角度を保つことがわかる.

4.3 場の方程式

つぎに場の方程式を求めよう．それには 5 次元空間の曲率テンソル

$$^5R^i{}_{kmn} \overset{d}{\equiv} \partial_m {}^5\Gamma^i{}_{nk} - \partial_n {}^5\Gamma^i{}_{mk} + {}^5\Gamma^i{}_{ml}{}^5\Gamma^l{}_{nk} - {}^5\Gamma^i{}_{nl}{}^5\Gamma^l{}_{mk},$$

および

$$^5R_{mn} = {}^5R_{nm} \overset{d}{\equiv} {}^5R^i{}_{mni}, \qquad {}^5R \overset{d}{\equiv} \gamma^{mn}\cdot{}^5R_{mn}$$

を 4 次元空間の曲率テンソルや $f_{\mu\nu}$ を用いて書き表わすことが必要である.

少々面倒な計算により次の関係が導かれる：

$$\left.\begin{aligned}
{}^5R_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + \frac{\alpha^2}{2}(A_\mu \nabla_\lambda f^\lambda{}_\nu + A_\nu \nabla_\lambda f^\lambda{}_\mu) \\
&\qquad + \frac{\alpha^2}{2} f_{\mu\lambda} f_\nu{}^\lambda - \frac{\alpha^4}{4} A_\mu A_\nu f_{\rho\sigma} f^{\rho\sigma}, \\
{}^5R_{4\mu} &= \frac{\alpha}{2}\nabla_\lambda f^\lambda{}_\mu - \frac{\alpha^3}{4} A_\mu f_{\rho\sigma} f^{\rho\sigma}, \\
{}^5R_{44} &= -\frac{\alpha^2}{4} f_{\rho\sigma} f^{\rho\sigma}, \\
{}^5R &= R + \frac{\alpha^2}{4} f^{\rho\sigma} f_{\rho\sigma}.
\end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

上の等式の右辺の各項は，すべて x^4 軸をはぶいた 4 次元 Riemann 空間におけるテンソル量である．∇_λ も 4 次元空間の共変微分を示す.

場の方程式を導くには作用積分

$$I_5 = -\frac{1}{2\kappa c}\int \sqrt{-\gamma}\cdot{}^5R d^5x + \int \mathcal{L}_{\mathrm{M}} d^5x \tag{4.22}$$

に Hamilton の原理を適用すればよい．ここで重力場および電磁場以外の物質場を $\varphi_A(x)$, $(A=1, 2, \cdots, N)$ で表わし，これから作られる Lagrange 関数を $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ と書くことにした．これも $\sqrt{-\gamma}\cdot{}^5R$ と同様に，5 次元スカラー密度とする.

なお，γ は，(4.8)′ を用いると

$$\gamma \overset{d}{\equiv} \det(\gamma_{ik}) = g\cdot\gamma_{44} = g$$

となる.

I_5 の変分を計算する際に，条件 $\gamma_{44}=1$ の存在を気にしないで，γ_{44} についても自由に変分をとることができるためには，(4.22)の右辺に

$$-\frac{1}{2\kappa c}\int\lambda(\gamma_{44}-1)d^5x \tag{4.22$'$}$$

という項をつけ加えておけばよい．この式の λ は Lagrange の未定乗数(multiplier)とよばれる補助変数である.

そこで γ_{mn} について変分をとると

$$+\frac{1}{2\kappa c}\left\{\sqrt{-\gamma}\left({}^5R^{mn}-\frac{1}{2}\gamma^{mn}\cdot{}^5R\right)-\lambda\delta^m{}_4\delta^n{}_4\right\}-\frac{1}{2c}{}^5\mathcal{T}^{mn}=0. \tag{4.23}$$

ここで

$${}^5\mathcal{T}^{mn}\overset{d}{\equiv}-2c\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial\gamma_{mn}}$$

である.

また λ の変分をとれば，$\gamma_{44}-1=0$ という条件が導かれる.

(4.23)は 15 個の方程式だが，未知関数は 15 個の γ_{ik} に $\lambda(x)$ を加えて総計 16 個である．しかし $\gamma_{44}=1$ だから，実際には 15 個，そのなかで，$m=n=4$ という式は $\lambda(x)$の定義式にほかならない．残りの 14 個のうち 10 個は重力場の方程式，残り 4 個は Maxwell の方程式に対応する.

(4.23)のこのような分析を行なうことははなはだ面倒である．そこで出発点となった(4.22)をまず，4 次元量を用いてかきなおす．その際 $\gamma_{44}=1$ を使うから，補助条件(4.22)$'$ は不要となる．結果は，(4.21)を使えば

$$\left.\begin{aligned}I_5&=\int dx^4\cdot I_4,\\ I_4&\overset{d}{\equiv}-\frac{1}{2\kappa c}\int\sqrt{-g}\left(R+\frac{\alpha^2}{4}f_{\rho\sigma}f^{\rho\sigma}\right)d^4x+\int\mathcal{L}_{\mathrm{M}}d^4x\end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

となる．I_4 の各項はすべて x^4 に無関係な量である.

この I_4 を，$g_{\mu\nu}$, A_μ および φ_A について変分をとれば，求める場の方程式が導かれる.

ここで

$$\alpha^2 = \frac{2\kappa}{\mu_0}, \qquad \mu_0 : \text{真空の透磁率} \tag{4.25}$$

ととれば，(4.24) は

$$I_4 = -\frac{1}{2\kappa c}\int \sqrt{-g}Rd^4x - \frac{1}{4\mu_0 c}\int \sqrt{-g}f_{\rho\sigma}f^{\rho\sigma}d^4x + \int \mathcal{L}_{\mathrm{M}}d^4x \tag{4.24$'$}$$

となる．これは一般相対論にでてくる作用積分と完全に一致する．

そこで $\partial I_4/\partial g_{\mu\nu}=0$ からは

$$\sqrt{-g}\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) = \kappa\left\{\frac{\sqrt{-g}}{\mu_0}\left(-f^{\mu}{}_{\alpha}f^{\nu\alpha} + \frac{1}{4}g^{\mu\nu}f_{\rho\sigma}f^{\rho\sigma}\right) + \mathcal{M}^{\mu\nu}\right\}. \tag{4.26}$$

ここで

$$\mathcal{M}^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} -2c\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial g_{\mu\nu}} = {}^5\mathcal{T}^{\mu\nu}$$

は物質場の作る 4 次元的なエネルギー・テンソル密度を表わす．

また $\partial I_4/\partial A_\mu=0$ から

$$\partial_\lambda(\sqrt{-g}f^{\mu\lambda}) = \mu_0\mathcal{J}^{\mu}. \tag{4.27}$$

ここで

$$\frac{1}{c}\mathcal{J}^{\mu} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial A_\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial \gamma_{\rho\sigma}}\frac{\partial \gamma_{\rho\sigma}}{\partial A_\mu} + \alpha\left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial \gamma_{\mu 4}} + \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial \gamma_{4\mu}}\right) = -\alpha^2 A_\nu \cdot {}^5\mathcal{T}^{\nu\mu} - \alpha \cdot {}^5\mathcal{T}^{\mu 4}$$

である．これは物質場の作る 4 次元電流密度である．

(4.27) からもわかるように $\mathcal{J}^{\mu}$ は，電荷の保存則

$$\partial_\mu \mathcal{J}^{\mu} = 0 \tag{4.28}$$

を満足する．

(4.26) の右辺は電磁場および物質場の作るエネルギー・テンソル密度の和を表わす．特に電磁場のエネルギー・テンソルが，重力場の方程式の中にその符号も含めて，正しい姿で，きわめて自然に出てくることは，この理論の長所である．

ところで未定の係数 α が(4. 25)ということになると(4. 20)から

$$\beta^2 = \frac{e^2}{m^2}\frac{1}{\alpha^2} = \frac{e^2\mu_0 c^4}{16\pi G m^2}.$$

これは次のように書きなおすことができる：

$$\frac{2\beta^2}{c^2} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\cdot\frac{\hbar/mc}{2Gm/c^2}$$
$$= \frac{1}{137}\cdot\frac{\lambda\!\!\!^{-}}{a}.$$

この最後の式は，粒子の Compton 波長 $\lambda\!\!\!^{-}$ と，その重力半径 a の比を示す．

粒子を電子と考えれば，上の式から

$$\beta^2/c^2 = 10^{45}$$

という大きな数となる．これが 1 の程度となるためには $\lambda\!\!\!^{-} \approx a$ が成立すること，つまり $m \approx 10^{23} \times$ 電子質量で，

$$\lambda\!\!\!^{-} \approx a \approx \sqrt{G\hbar/c^3} \approx 10^{-34}\,\mathrm{cm}$$

という小さな値とならねばならない．

電子の場合には $\beta^2 \approx 10^{45}\cdot c^2$ となるから(4. 18)の $\pm$ は

$$c^2 = -g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = \beta^2 - K^2$$

としなければならない．これに応じて(4. 14)′ は

$$I = \int\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu + (\gamma_{4i}\dot{x}^i)^2}\,d\tau \qquad (4.\ 14)''$$

となる．

以上のように，この理論はすべての点で，電磁場と重力場を時空の幾何学的量を用いて統一的に表現することに，一見，成功しているように思われる．この理論はまず Kaluza により提唱され，つづいて Klein がこの理論の発展に努力した．特にこの理論の特徴である第 5 番目の次元 x^4 に関連する二つの条件，“1) すべての量は x^4 に無関係である．2) $\gamma_{44}=1$ とする” を取り除くこと，あるいは取り除かないまでも，これらよりもう少し，ゆるい条件，あるいは，より自然なものに置きかえようという試みが Klein により研究された．またこの理論が発表された時代は，ちょうど，Heisenberg や Schrödinger の量子力学が誕生したころだったために，Schrödinger 方程式をこの理論と結びつけよう

とする試みなどもあったように記憶している.

4.4 Kaluza理論に対する批判

ここで一言だいじなことを述べたい. 荷電粒子の運動方程式として(4.19)′が導かれたこと, また重力場の方程式(4.26), および電磁場の方程式(4.27)が導かれたというだけで, この理論は統一場理論として合格であるというわけにはいかない.

ただ電磁場とEinsteinの重力場との関係だけについていえば, (4.21)の最後の関係

$$^5R = R + \frac{\alpha^2}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu},$$

つまり R と $f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}$ が $-$ ではなく $+$ で結ばれているという事実は成功とみなすべきである.

しかしここに登場する A_μ を電磁ポテンシャルとみなすことの正否を判断するには, それが荷電場とどのように結びつくかを詳細に検討することが必要である. 単に運動方程式(4.19)′が導かれたというだけでは, この理論を成功といいきるのには不十分である.

なぜならば, 荷電物質場 φ_A の Lagrange 関数 $\mathcal{L}_\mathrm{M}$ が5次元座標変換 $x^i \to x'^i(x^0, \cdots, x^4)$ に対してスカラー密度であるという要請から以下のようにして(4.19)′を導くことができるからである.

まず上述の要請から次の恒等式が求まる：

$$^5\nabla_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\partial \gamma_{ik}} \gamma_{kl}\right) \equiv \left[\frac{\partial \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\partial \varphi_A}\text{に比例する項の和}\right].$$

もし φ_A 場の方程式

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\mathrm{M}}{\partial \varphi_A} = 0 \tag{4.29}$$

を用いれば, 上の恒等式の右辺は0となり

$$^5\nabla_i \mathcal{T}^{ik} \overset{d}{\equiv} \partial_i \mathcal{T}^{ik} + {}^5\Gamma^k{}_{mn} \mathcal{T}^{mn} = 0 \tag{4.30}$$

という等式が導かれる. (4.30)の $\mathcal{T}^{ik}$ は

$$\mathcal{T}^{ik} \overset{d}{\equiv} -2c\frac{\partial \mathcal{L}_M}{\partial \gamma_{ik}} (= {}^5\mathcal{T}^{ik}),$$

つまり φ_A 場の 5 次元エネルギー・テンソル密度を表わす．

ここで，すべての量は x^4 に無関係という条件，および $\gamma_{44}=1$ とおく．さらに φ_A 場は荷電粒子の砂塵状の集団とすれば，エネルギーは，点状に局在しているはずだから

$$\mathcal{T}^{ik}(x) = \sum_{n=1}^{N} \int T^{ik}(\tau_n)\cdot\delta^4[x-z(n)]d\tau_n \qquad (4.31)$$

と書くことができる．ここの計算法や記号はすべて本章の最後の付録 A と同じだから，詳細な説明は省く．ここで，$z^\mu(\tau_n)$，略して $z^\mu(n)$ は第 n 番目の粒子の 4 次元座標，τ_n はその固有時である．

さて，空間変数 x^a $(a=1,2,3)$ だけの任意関数 $f(\vec{x})$ を (4.30) にかけ，第 n 番目の粒子に着目し，それだけを包む小さな 3 次元空間域 V_n の中で (4.30) を積分する．

(4.31) を (4.30) に代入し，付録 A と同様の計算を行なうと，次の結果が求まる：

$$\left\{\frac{d}{d\tau}(T^{0k}(\tau)/\dot{z}^0) + {}^5\Gamma^k{}_{ij}(z)T^{ij}(\tau)\right\}(f/\dot{z}^0)$$
$$+\sum_{a=1}^{3}\{(T^{0k}\dot{z}^a/\dot{z}^0) - T^{ak}(\tau)\}\{\partial f(\vec{z})/\partial z^a\}/\dot{z}^0 = 0. \qquad (4.32)$$

ここで $\dot{z}=dz(\tau)/d\tau$，また n という粒子番号は省いた．上の式の τ としては，$x^0=z^0(\tau)$ をみたす特別な時刻 τ を採用することはいうまでもない．

ここで，$f, \partial f(\vec{z})/\partial z^a$ は互いにまったく独立だから，(4.32) の各項は別々に 0 でなければならない．そこでまず第 2 項から

$$T^{0k}\dot{z}^a/\dot{z}^0 = T^{ak}, \qquad (a=1,2,3,\ \ k=0,\cdots,4).$$

これを見ればﾞ*)，

$$T^{\mu k}(\tau) = -m\dot{z}^\mu\dot{z}^k \qquad (\mu=0,\cdots 3,\ \ k=0,\cdots,4) \qquad (4.33)$$

*) (4.33) の右辺の $\dot{z}^4$ は τ の任意の関数でよい．しかしこれを粒子の 5 次元速度ベクトルの x^4 成分とみなすならば (4.17) について p. 57 の始めに述べたような幾何学的解釈が可能となる．

とすればよいことがわかる．簡単のために m は定数とおく．

(4.33) を (4.32) の第 1 項に代入すれば

$$\frac{d\dot{z}^k}{d\tau}+{}^5\Gamma^k{}_{mn}\dot{z}^m\dot{z}^n=0. \tag{4.34}$$

ここで ${}^5\Gamma^k{}_{44}=0$ だから，(4.33) の中に T^{44} の定義が欠落しているが心配無用である．

(4.34) の $k=0,\cdots,3$ とすれば (4.19)′ となる．また $k=4$ とすれば，これは (4.17) を与える．なお同様の計算法により (4.28) からも (4.17) を導くことができる．

運動方程式 (4.19)′ の上述の導き方を見ればわかるように，φ_A 場と A_μ とがどのように結合するかに関して，具体的な知識がなくとも，ただ $\mathcal{L}_\mathrm{M}$ がスカラー密度でありさえすれば，必ず (4.19)′ が導かれる．

それゆえ，(4.19)′ が導かれたということは，φ_A 場と A_μ との結合が，φ_A 場と電磁場の結合を正しく表現しているという保証にはなりえない．

例えば，φ_A として，複素スカラー場 φ, φ^* を考えてみよう．Kaluza 理論に素直にしたがえば Lagrange 関数として

$$\mathcal{L}_\mathrm{M}=-\sqrt{-\gamma}\{\gamma^{ik}(\partial_i\varphi^*\cdot\partial_k\varphi)+m^2\varphi^*\cdot\varphi\} \tag{4.35}$$

を採用することは許される．

ここですべての量が x^4 に無関係とすれば，荷電場を表わす φ, φ^* 場は A_μ とまったく相互作用しないことになる．つまり Kaluza 理論の A_μ は電磁ポテンシャルに似て非なるものということになる．

しかし，φ は x^4 に依存するが，$\mathcal{L}_\mathrm{M}$ 自身は x^4 に無関係とすれば $\varphi(x)$ を，例えば

$$\varphi(x)=\phi(x^0,\cdots,x^3)\cdot\exp(iax^4) \quad : a=\text{未定の定数} \tag{4.36}$$

という形の量とすることもできる．

このときは (4.35) は次のようになる：

$$\mathcal{L}_\mathrm{M}=-\sqrt{-g}\{g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi^*+ia\alpha A_\mu\phi^*)(\partial_\nu\phi-ia\alpha A_\nu\phi)+(m^2+a^2)\phi^*\cdot\phi\}. \tag{4.35′}$$

(4.35)′ は，電磁場と相互作用している荷電複素スカラー場に対する，われわれになじみの深い形の Lagrange 関数である．したがって，この場合には，Kaluza の理論は，重力場と電磁場を統一的に表現しているといってよい．

(4.35)′ にでてきた未定の定数 a をきめるために，例えば Weyl のゲージ理論の最後にある式(3.43)にならって

$$a\alpha = \frac{e}{\hbar}$$

とおけば，(4.36)が示すように，もとのスカラー場 φ は，x^4 軸の方向に $2\pi\hbar\alpha/e$ という周期性をもつ量となる．

この周期の長さは，(4.25)を用いると

$$2\pi\hbar\alpha/e = 4\pi\sqrt{137\frac{G\hbar}{c^3}} = 2.4\times10^{-31}\,\mathrm{cm}$$

という小さな量である．また(4.35)′ の最後には

$$M = \frac{\hbar}{c}a = 10^{21}\times(\text{電子質量})$$

という大きな質量項が付け加わる．

この(4.36)からもわかるように，x^4 座標と電荷の間の関係は，力学でいう共役関係になっており，電荷は5次元運動量の第5成分(x^4 成分)に該当する．そこで，上述の周期性を利用した電荷の“量子化”という考えも生まれてくる．

ここに述べたことからもわかるように，重力場と電磁場のポテンシャルを時空の計量テンソルを用いて統一的に記述したことが，同時に，荷電物質場と電磁場の間の相互作用を正しく表現することになるためには，上述の例のように，x^4 座標の扱い方を工夫する必要がある．上述の例では，幸いにして望み通りの結果が得られたが，もしスカラー場のかわりに，荷電物質場として複素ベクトル場を考えた場合には，上述のように具合よくはいかない．この場合には，望ましい結果のほかに，望みもしない項がたくさんにでてくる．

またたとえ，その結果が，形の上では，望み通りに整頓できたとしても，ただそれだけでは，重力場と電磁場をまとめて，簡単な便利な形に書き表わしたというにすぎない．そのような統一的記述によって，例えば素電荷 e の存在すべきことが明らかになるとか，重力定数 G と素電荷 e の間の，いままで知られなかった新しい関係が発見されるといったようなことが，少なくともひとつは実現されてはじめて，両場の統一が真に成し遂げられたというべきであろう．

第Ⅱ編

不変変分論

5

問題の提起と記号の説明

一般相対論が完成されたころ，一般座標変換に対する重力場の方程式の不変性(正しくいえば共変性)と，10 個の場の方程式の間に内在する恒等的な関係式との間の関連が問題視されたことがある．この問題には，物理学者のみならず，Hilbert のような数学者までも強い関心を示した．なかでも以下に述べる Noether[9] の論文は，この問題に決着をつけたものとして，一般によく知られている．この，Noether の論文は以下に述べる解説よりも，もっと一般的な形をしているが，ここでは，原論文の本質的な点を失わないように注意しながら，できるだけ簡明な形で，Noether の推論のすじにしたがって，この問題を説明する．

時空を表わす 4 次元多様体(その中の点の座標を x^μ, $\mu=0, \cdots, 3$) の中に N 個の成分をもつ場 $\varphi_A(x)$ $(A=1, 2, \cdots, N)$ があるとする．φ_A は 1 種類の場でもよいし，電子場と電磁場といったように別種の場を一緒にしたものでもよい．そのときは，添字 A は，両種の場を一緒にした通し番号を表わすものとする．たとえば Kaluza-Klein の 5 次元論の場合には $g_{\mu\nu}$, A_μ を一括して $\varphi_A(x)$ と書き $A=1, 2, \cdots, 14$ とする．この中で 1 から 10 までが $g_{\mu\nu}$ を，11～14 が A_μ を表わすとする．

古典場の理論では，$\varphi_A(x)$ のふるまいを規定する場の方程式は，Hamilton の原理にしたがい，作用積分

$$I \overset{d}{\equiv} \int_\Omega L(\varphi_A, \varphi_{A,\mu}) d^4x \tag{5.1}$$

の $\varphi_A(x)$ についての変分を計算することにより導かれる．

(5.1)では以下の記号が用いられている：

$$\varphi_{A,\mu} \stackrel{d}{\equiv} \partial\varphi_A/\partial x^\mu, \qquad d^4x \stackrel{d}{\equiv} dx^0 dx^1 \cdots dx^3.$$

Ω は時空内の任意の4次元的拡がりをもった積分域，また Lagrange 関数 L が φ_A および $\varphi_{A,\mu}$ のどのような関数であるかは，あらかじめ与えられているものとする．

上にも述べたように，φ_A のみたすべき場の方程式は，変分法を使って(5.1)から導かれる N 個の Euler 方程式*)

$$[L]^A \stackrel{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial\varphi_A(x)} - \partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}\right) = 0 \tag{5.2}$$

である．この右辺の φ_A についての微分は，$\varphi_A(x)$ を x の関数とは考えず，普通の変数による微分と同じように微分するものとする．$\varphi_{A,\mu}$ についての微分についても同様である．

これから

$$\left.\begin{aligned} x^\mu &\to x'^\mu = f^\mu(x^0, \cdots, x^3), \\ \varphi_A(x) &\to \varphi'_A(x') = F_A(\varphi, x) \end{aligned}\right\} \tag{5.3}$$

という変換を考えよう．これに応じて I は

$$\begin{aligned} I &= \int_\Omega L\{\varphi_A(x), \varphi_{A,\mu}(x)\} d^4x \\ \to I' &\stackrel{d}{\equiv} \int_{\Omega'} L\{\varphi'_A(x'), \partial\varphi'_A(x')/\partial x'^\mu\} d^4x' \end{aligned} \tag{5.4}$$

のように変換される(注：L の関数形は変更しない)．

(5.4)の I' の積分域が Ω' と書かれているが，これは時空のなかでは，I の積分域とまったく同一の領域である．変換前の座標系を用いたとき，Ω の変域が，たとえば$(a^\mu \leq x^\mu \leq b^\mu)$, $(\mu=0, \cdots, 3)$のように定義されていたとする．これを新座標系を用いて書きなおすと，積分域は数値的には Ω と異なった$(a'^\mu \leq x'^\mu \leq b'^\mu)$となる．後者を本書では Ω' と書いた．Ω と Ω' はみかけの上では異なっていても，時空内の領域としては，両者はまったく同じものである．

---

*) $[L]^A$ の代りに $\delta L/\delta\varphi_A$ という記号を用いることもある．例えば φ がスカラー場のときは添字 A がないから，$[L]$ よりも $\delta L/\delta\varphi$ の方が，記号の意味がわかりやすく，好ましい．

さて(5.4)で定義されたI'が特に不変，つまり

$$I \equiv I' \tag{5.5}$$

という場合に，(5.5)からどのような結果が導かれるかということが第II編の主題である.

ここで(5.5)にでてきた≡は，Iの積分域Ωがどのようなものであろうとも，また$\varphi_A(x)$が，場の方程式(5.2)の解である，なしに関係なく成立する恒等式であることを意味する．第II編では，≡はつねにこの意味を示すものとする．一方＝は，φ_Aが(5.2)の解である場合にはじめて成立する等式を示すものとする.

変換(5.3)の第1式は，任意の世界点Pの座標が，いままではx^μであったが，それを新たにx'^μに変えるという意味である．(5.3)の2番目の式は，同一の世界点Pにおける場の量φ_Aの置きかえ，および新旧のφ_Aの値の間の関係を示すものである．ここでは一般的に，φ'_Aは，もとの値$\varphi_A(x)$のみならず，Pの座標自身にも，あらわに関係してもよいと考えている.

ここで特に変換(5.3)がn個のパラメーターε^r，あるいはn個の任意に採りうる連続関数$\xi^r(x)$ $(r=1,2,\cdots,n)$に依存する連続群をなすという場合を考える．すなわち(5.3)が

$$\left.\begin{aligned} &x^\mu \to x'^\mu = f^\mu(\varepsilon, x),\ \text{あるいは}\quad f^\mu(\xi(x), x),\\ &\varphi_A(x) \to \varphi'_A(x') = F_A(\varepsilon, x, \varphi(x)),\\ &\qquad\qquad\qquad \text{あるいは}\quad F_A(\xi, \partial\xi/\partial x, \cdots, \partial^p\xi/\partial x^p, x, \varphi) \end{aligned}\right\} \tag{5.3$'$}$$

という形に書き表わされる場合である.

ここでf^μはε^r, x^μのそれぞれについて連続で，必要な階数まで微分可能とする．また$F_A(\varepsilon, x, \varphi)$も$\varepsilon^r, x^\mu$および$\varphi_A(x)$のそれぞれに対して連続で必要な階数まで微分可能な関数とする．ε^rのかわりに$\xi^r(x)$が登場する場合には，f^μ, F_Aはξ^rや$\partial\xi^r/\partial x, \cdots\cdots, \partial^p\xi^r/\partial x^p$のそれぞれについて必要な階数まで微分が可能とする．なお$\varepsilon^r, \xi^r(x)$が0のときは変換は(5.3)$'$は恒等変換：

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu, \qquad \varphi_A(x) \to \varphi'_A(x') = \varphi_A(x)$$

となるように，ε^rや$\xi^r(x)$が選ばれているものとする．したがってε^rや$\xi^r(x)$を十分に小さく選んだ場合

$$\delta x^\mu \overset{d}{\equiv} x'^\mu - x^\mu, \qquad \delta\varphi_A(x) \overset{d}{\equiv} \varphi'_A(x') - \varphi_A(x) \tag{5.6}$$

は，いずれも ε^r，あるいは $\xi^r(x)$ について１次の無限小量であるとする．

このような無限小変換に対して，I' がどのようになるか，$\delta x^\mu, \delta\varphi_A(x)$ の２次以上を無視して，その形を具体的に求めてみよう．まず I' は，積分変数をもとの x で書きかえれば，

$$I' = \int_\Omega L\{\varphi(x)+\delta\varphi(x), \varphi_{,\mu}(x)+\delta\varphi_{,\mu}(x)\}\frac{\partial(x')}{\partial(x)}d^4x$$

のように書き表わされる．ここで Jacobian $\partial(x')/\partial(x)$ は４階行列式

$$\frac{\partial(x')}{\partial(x)} \overset{d}{\equiv} \det\left(\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right) = \det\left(\delta^\mu{}_\nu + \frac{\partial(\delta x^\mu)}{\partial x^\nu}\right)$$

のことである．これは，δx の１次までの近似では

$$\frac{\partial(x')}{\partial(x)} = 1 + \partial_\nu(\delta x^\nu)$$

となる．

ここで計算に便利なように，(5.6) で定義された変分 δ のほかに，さらにつぎのような別種の変分 $\bar{\delta}$ を定義しよう．

いま任意の量 $F(x)$ が，変換 (5.3)$'$ に応じて

$$F(x) \to F'(x')$$

のように変換されたとする．このとき，変分 δF は，(5.6) にならって，次のように定義される：

$$\delta F(x) \overset{d}{\equiv} F'(x') - F(x). \tag{5.7a}$$

これとは別に，いま $\bar{\delta}F$ を

$$\bar{\delta}F(x) \overset{d}{\equiv} [F'(x')]_{x'=x} - F(x) \tag{5.7b}$$

と定義する．

(5.7a) の右辺の $F(x), F'(x')$ は，それぞれ，同一の世界点 P における変換前後の F の値を示す．一方，(5.7b) の右辺では，その第２項 $F(x)$ は，旧座標が x という値をもつ世界点 P における F の値である．一方，第１項 $[F'(x')]_{x'=x}$ は，第２項とは別の世界点 Q における F' の値を示す．ここで点 Q とは，Q の新座標 x' の値が，P の旧座標 x の値に等しいという関係をみたす特別な点である．これを式で書けば

$$x'^\mu(\mathrm{Q}) = x^\mu(\mathrm{P}). \tag{5.8}$$

ついでに(5.7a), (5.7b)をわかりやすく書けば

$$\delta F(x) \stackrel{d}{\equiv} F'(\mathrm{P}) - F(\mathrm{P}), \tag{5.7a$'$}$$

$$\bar{\delta} F(x) \stackrel{d}{\equiv} F'(\mathrm{Q}) - F(\mathrm{P}) \tag{5.7b$'$}$$

となる.

したがって

$$\delta F = \bar{\delta} F + \partial_\mu F \delta x^\mu. \tag{5.9}$$

また, (5.7a, b)および(5.9)を使うと

$$\left.\begin{aligned} \delta(\partial_\mu F) &\stackrel{d}{\equiv} \frac{\partial F'(x')}{\partial x'^\mu} - \frac{\partial F(x)}{\partial x^\mu} = \partial_\mu(\delta F) - \partial_\nu F \partial_\mu(\delta x^\nu), \\ \bar{\delta}(\partial_\mu F) &= \partial_\mu(\bar{\delta} F) \end{aligned}\right\} \tag{5.10}$$

が成りたつことも容易にわかる.

(5.9)により δ をすべて $\bar{\delta}$ で書き表わすと, I' はつぎのようになる[*]:

$$I' = I + \int_\Omega \left[\frac{\partial L}{\partial \varphi_A} (\bar{\delta} \varphi_A + \varphi_{A,\mu} \delta x^\mu) + \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\nu}} \{ \bar{\delta}(\partial_\nu \varphi_A) + \varphi_{A,\nu\mu} \delta x^\mu \} + L \partial_\mu (\delta x^\mu) \right] d^4 x.$$

あるいは(5.10)の第2式を使って $\bar{\delta}\partial\varphi$ を $\partial\bar{\delta}\varphi$ に書きかえると, 部分積分ができるから

$$\begin{aligned} \delta I &\stackrel{d}{\equiv} I' - I \\ &= \int_\Omega \left\{ [L]^A \bar{\delta} \varphi_A + \partial_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\nu}} \bar{\delta} \varphi_A + L \delta x^\nu \right) \right\} d^4 x \end{aligned} \tag{5.11}$$

となる.

そこで, もし変換(5.3)$'$ に対して, I が不変ならば, (5.11)から

$$\int_\Omega \left\{ [L]^A \bar{\delta} \varphi_A + \partial_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\nu}} \bar{\delta} \varphi_A + L \delta x^\nu \right) \right\} d^4 x \equiv 0 \tag{5.12}$$

という恒等式が導かれる.

$\bar{\delta}$ の代わりに δ を使えば(5.12)は

---

[*] 一つの項の中に, 同じ文字の添字が上下に出てきたときは, その添字がとりうる数域にわたって和をとるというテンソル算の約束をここでも転用する. 例えば φ_A の A については1から N までの和をとるものとする. 他の種類の添字についても同様である.

$$\int_\Omega\left\{[L]^A(\partial\varphi_A-\varphi_{A,\mu}\partial x^\mu)+\partial_\nu\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\nu}}\partial\varphi_A-E^\nu{}_\mu\partial x^\mu\right)\right\}d^4x\equiv 0 \qquad (5.12)'$$

と書くこともできる．ここで $E^\nu{}_\mu$ とは

$$E^\nu{}_\mu \stackrel{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\nu}}\varphi_{A,\mu}-\partial^\nu{}_\mu L \qquad (5.13)$$

である．これは Lagrange 関数 L により規定された物理系の**正準エネルギー・運動量**テンソルとよばれる．“テンソル”とはいうものの，これがその名の通り，座標変換に対してテンソルの定義にしたがって変換されるとはかぎらないから注意を要する．

これから変換(5.3)′がパラメーター ε^r に依存する変換群の場合と，任意関数 $\xi^r(x)$ に依存する場合に分けてさらに立ち入った説明をすることにしよう．

6 パラメーターに依存する変換群の場合

6.1 大域的変換

これから扱う変換は

$$x^\mu \to x'^\mu = f^\mu(\varepsilon, x), \qquad \varphi_A(x) \to \varphi'_A(x') = F_A(\varepsilon, \varphi) \qquad (6.1)$$

という形の，n 個の実数のパラメーター $\varepsilon^r\,(r=1, \cdots, n)$ に依存するものである．

n 個の独立な連続パラメーター ε^r を，それらに与えられた数域の中で連続的に変化させると，それに応じて，連続無限個の異なった，(6.1) という形の変換が生まれる．これら全体がひとつの連続群をなす場合が，これからの議論の主題である．

(6.1) の第 2 式では，(5.3)′ とは異なり，φ の変換に座標 x があらわに出てこない．つまり φ_A の変換の形式は，時空内のいたる所でまったく同じ形をしている．この特徴のゆえに，(6.1) のような変換を**大域的変換**(global transformation) という［厳密にいえば，$f^\mu(\varepsilon, x)$ は x の 1 次式でなければならない］.

ところで，物理学に最も多く登場する変換群は (6.1) の $F_A[\varepsilon, \varphi]$ が，φ について一次同次式，すなわち

$$\varphi'_A(x') = F(\varepsilon)_A{}^B \varphi_B(x) \qquad (6.1)'$$

という場合である．

n 個のパラメーター $\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^n$ の連続関数 $F(\varepsilon)_A{}^B$ を (A, B) 行列要素とする $N \times N$ 行列 $\boldsymbol{F}(\varepsilon)$:

$$\{\boldsymbol{F}(\varepsilon)\}_A{}^B \overset{d}{\equiv} F(\varepsilon)_A{}^B$$

の集合がひとつの連続群を構成するとき，これを**線形 Lie 群**という．今後は (6.1) が線形 Lie 群の場合にかぎることにする．なお，パラメーター ε^r がすべ

て0のとき，変換(6.1)が恒等変換となるように，ε^r は上手に選んであるものとする．

このような場合には，ε^r を十分に小さくとれば，ε^r の1次までの近似で，(6.1)は

$$\begin{aligned}\delta x^\mu &\overset{d}{\equiv} x'^\mu - x^\mu = \varepsilon^r f_r{}^\mu(x),\\ \delta\varphi_A(x) &\overset{d}{\equiv} \varphi'_A(x') - \varphi_A(x) = \varepsilon^r F_{r,A}{}^B\cdot\varphi_B\end{aligned} \tag{6.2}$$

となる．ここで

$$f_r{}^\mu(x) \overset{d}{\equiv} \frac{\partial}{\partial\varepsilon^r} f^\mu(\varepsilon, x)\Big|_{\varepsilon=0}, \qquad F_{r,A}{}^B \overset{d}{\equiv} \frac{\partial}{\partial\varepsilon^r} F_A{}^B(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}$$

という記号を用いた．

(6.2)の第2式は，行列形式を用いると

$$\boldsymbol{\varphi}'(x') = (\mathbf{1}+\varepsilon^r \boldsymbol{F}_r)\boldsymbol{\varphi}(x) \tag{6.3}$$

と書くことができる．ここで $\boldsymbol{\varphi}$ は，$(\varphi_1, \cdots, \varphi_N)$ を縦1列に並べた行列を示す．また $\boldsymbol{F}_r$ は

$$\boldsymbol{F}_r \overset{d}{\equiv} \frac{\partial}{\partial\varepsilon^r}\boldsymbol{F}(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} \tag{6.4}$$

という n 個の $N\times N$ 行列である．これの (A, B) 行列要素が

$$(\boldsymbol{F}_r)_A{}^B \overset{d}{\equiv} F_{r,A}{}^B$$

である．これは x にも，ε にも無関係な定数であるが，パラメーター ε^r の選び方を変えれば，それに応じて $\boldsymbol{F}_r$ の各行列要素の数値も変わることは，いうまでもない．$\boldsymbol{F}_r$ は，(6.1)′ で定義された線形 Lie 群の**生成元**とよばれる．これは付録 B の(B.1)に与えられた G_r にほかならない．

(6.1)′ が群であるということから $\boldsymbol{F}_r$ は(付録 B 参照)

$$[\boldsymbol{F}_r, \boldsymbol{F}_s] \overset{d}{\equiv} \boldsymbol{F}_r\cdot\boldsymbol{F}_s - \boldsymbol{F}_s\cdot\boldsymbol{F}_r = C_r{}^t{}_s\cdot\boldsymbol{F}_t \tag{6.5}$$

という重要な関係を満足する．(6.5)の右辺にでてきた $C_r{}^t{}_s$ は，Lie 群の**構造定数**とよばれ，その名の示すように，群の特性を示すだいじな定数である．これは，ε^r の選び方を変えれば，もちろん，それに応じて変化する．しかし ε^r をどのように選ぼうとも，これは

$$C_r{}^t{}_s = -C_s{}^t{}_r, \qquad C_r{}^p{}_q C_s{}^q{}_t + C_s{}^p{}_q C_t{}^q{}_r + C_t{}^p{}_q C_r{}^q{}_s = 0 \tag{6.6}$$

という関係を満足する．

(6.6)の第1式は(6.5)を見れば，すぐに納得できる．(6.6)の第2式は，Jacobiの恒等式

$$[\boldsymbol{F}_r,[\boldsymbol{F}_s,\boldsymbol{F}_t]]+[\boldsymbol{F}_s,[\boldsymbol{F}_t,\boldsymbol{F}_r]]+[\boldsymbol{F}_t,[\boldsymbol{F}_r,\boldsymbol{F}_s]]\equiv 0$$

に(6.5)を代入することにより，容易に導かれる．

ここで話を本筋にもどして，(5.12)′に(6.2)を代入しよう．それは

$$\int_\Omega \varepsilon^r\{\cdots\}d^4x\equiv 0 \qquad (5.12)''$$

という形になる．

ところで(5.12)″はΩの位置，大きさなどに関係なく成立する恒等式であるから，特にΩとして任意の点xをとり囲む無限小領域を選べば，点xにおける{ }≡0，すなわち

$$[L]^A(F_{r,A}{}^B\cdot\varphi_B-\varphi_{A,\mu}f_r{}^\mu)$$
$$+\partial_\nu\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\nu}}F_{r,A}{}^B\cdot\varphi_B-E^\nu{}_\mu f_r{}^\mu\right)\equiv 0 \qquad (6.7)$$

というn個の恒等式が導かれる．

(6.7)は，φ_Aが場の方程式の解であるなしに関係なく，任意のφ_Aに対して成立する恒等式である．

特にφ_Aが場の方程式

$$[L]^A=0 \qquad (5.2)$$

の解である場合には，(6.7)は

$$\partial_\nu J^\nu{}_r=0 \qquad (r=1,\cdots,n) \qquad (6.8)$$

となる．ここで$J^\nu{}_r$は

$$J^\nu{}_r\overset{d}{\equiv}\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\nu}}F_{r,A}{}^B\cdot\varphi_B-E^\nu{}_\mu f_r{}^\mu \qquad (6.9)$$

である．

いままで述べてきたところでは，座標$x^0,\cdots,x^3$については，特に何らの制限もなかった．しかし以上の議論を物理学上の問題に適用する場合には，時空という多様体には必ず特殊相対論的計量テンソル$\eta_{\mu\nu}$とか，一般相対論的計量テンソル$g_{\mu\nu}(x)$が登場する．そこでこれらの計量テンソルを用いて，時間的，あるいは空間的座標という区別が定義できるから，今後はx^0は時間的座標，x^1,

x^2, x^3 は空間的座標と約束する．さらに物理系の存在する場所から十分に離れた地点では，$x^0, \cdots, x^3$ は特殊相対論における Lorentz 系の座標変数と一致するものと約束する．つまりこの節では閉じた宇宙は，考慮の対象から除外する．

以上の約束のもとに，任意の瞬間 x^0 において，φ_A によって記述された物理系を包む大きな3次元空間的領域 V の中で，(6.8) を積分すると，

$$\partial_0 \int_V J^0{}_r d^3x = -\sum_{k=1}^{3} \int_V \partial_k J^k{}_r d^3x. \tag{6.8$'$}$$

この右辺は Gauss の定理により

$$-\sum_{k=1}^{3} \int_S J^k{}_r d\sigma_k$$

となる．ここで S は V の表面を表わす．この表面上の任意の点における無限小の面積素片を $d\sigma$，その点で S の外向きの，大きさ1の法線ベクトルを n_k ($k=1,2,3$) とすると，$d\sigma_k$ は

$$d\sigma_k = n_k d\sigma$$

と書き表わされる．

もし V を無限に大きくとるとき，その表面積が大きくなる割合よりも，$J^k{}_r$ が0に近づく割合が大きければ(このような特性をもつ物理系を閉じた物理系とか，孤立系という) $J^k{}_r$ の S 上にわたる表面積分は0となる．

そこで (6.8)$'$ から n 個の保存量

$$J_r = \int_{-\infty}^{\infty} J^0{}_r d^3x = \text{一定} \tag{6.10}$$

が求まる．この事情から (6.8) を**保存則**とよぶ．

以上の結果は，無限小変換 (6.2) だけを用いて導かれたものである．逆に恒等式 (6.7) を出発点として，いままでの推論を逆向きにたどれば，作用積分 I が無限小変換 (6.2) に対して不変という結論に導かれる．

ここで，(6.2) に顔を出している行列 $\boldsymbol{F}_r$ が，さらに (6.5) という Lie 代数の基本的関係をみたし，さらに (6.5) の右辺に出てきた定数 $C_r{}^t{}_s$ が (6.6) という大事な関係をみたすとすれば，(6.2) という無限小変換をくりかえし積み重ねることにより，(6.1) という変換が得られる．しかもそれは n 個のパラメーターに依存する線形 Lie 群に属することになる．したがって I は (6.1) という変換

群*) に対して不変という結論が導かれる.

いままで述べたことをまとめると，次の定理が導かれる.

6.2 Noether の第1定理

n 個の独立なパラメーターに依存する線形 Lie 群を G とする．G に属する変換(6.1)に対して，作用積分 I が不変なための必要十分条件は，n 個の恒等式(6.7)が成立することである．なお場の方程式(5.2)を用いることにより，n 個の保存則(6.8)が導かれる．これを **Noether の第1定理**とよぼう.

いままでは話を簡明にするために，変換(6.1)が線形 Lie 群に属する場合にかぎってきた．しかし(6.1)の第2式が，φ について一次式でなくても別にかまわない．ε^r が0のとき(6.1)が恒等変換になるように，パラメーターが選ばれておれば，十分小さな ε^r に対して

$$\delta\varphi_A = \varepsilon^r F_{r,A}(\varphi), \qquad F_{r,A}(\varphi) \stackrel{d}{\equiv} \frac{\partial}{\partial\varepsilon^r} F_A(\varepsilon, \varphi)\bigg|_{\varepsilon=0} \tag{6.11}$$

となる．これを(5.12)′ に代入すれば，(6.7)を少々，一般化した恒等式が導かれる.

なおこの場合には(6.5)のかわりに，

$$\left(\frac{\partial}{\partial\varphi_B} F_{r,A}(\varphi)\right) F_{s,B} - \left(\frac{\partial}{\partial\varphi_B} F_{s,A}(\varphi)\right) F_{r,B} = C_r{}^t{}_s F_{t,A} \tag{6.12}$$

という関係式が必要となる．変換(6.1)が連続群を構成するためには $F_{r,A}(\varphi)$ は(6.12)を満足しなければならない．$F_{r,A}(\varphi)$ が，特に φ の一次式ならば，(6.12)が(6.5)となることは，容易にわかるであろう.

これから Noether の第1定理の応用例を示そう.

6.3 推進群とエネルギー・運動量保存則

座標原点の移動によりひき起こされる，各点の座標値の変更

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu \tag{6.13}$$

---

*) 厳密にいえば，恒等変換と連続的に連結されている変換だけから構成されている変換群に対して I が不変となる.

を考えよう．

このような変換をしても，各点における φ_A の値は変化しないから

$$\delta\varphi_A \overset{d}{\equiv} \varphi'_A(x') - \varphi_A(x) = 0.$$

また(5.10)からも容易にわかるように $\delta\varphi_{A,\mu}$ も 0 となる．つまり変換(6.13)に対しては，(6.2)にでてきた諸記号はつぎのようになる：

$$f_r{}^\mu = \delta^\mu{}_r, \qquad F_{r,A}{}^B = 0.$$

ところで Lagrange 関数 L が，$\varphi_A, \varphi_{A,\mu}$ だけの関数で，x^μ が L の中にあらわに顔を出さないときは，$\varphi_A(x)$ を $\varphi'_A(x')$ に書きかえても L の値は変わらない．したがって Noether の第1定理を適用できる．このときは恒等式(6.7)は次のようになる：

$$\partial_\nu E^\nu{}_\mu \equiv -[L]^A \varphi_{A,\mu}. \tag{6.14}$$

ここで場の方程式を使えば，4 個の保存則

$$\partial_\nu E^\nu{}_\mu = 0 \tag{6.15}$$

が導かれる．

この物理系が特に，孤立系のときは，(6.15)を全空間にわたって積分することにより

$$E_\mu \overset{d}{\equiv} \int_{-\infty}^{\infty} E^0{}_\mu d^3x = \text{一定} \tag{6.16}$$

となる．これは(6.10)に相当するもので，cE_0 はこの物理系の全エネルギーを，また $-E_k$ $(k=1,2,3)$ は全運動量の直交成分を表わす．

x^μ が L の中にあらわに顔を出すときは

$$L\{\varphi'_A(x'), \varphi'_{A,\mu}(x'), x'\} \equiv L\{\varphi_A(x), \varphi_{A,\mu}(x), x+\varepsilon\}$$

という等式がなりたつ．そこで I' をつぎのように定義する：

$$\begin{aligned} I' &\overset{d}{\equiv} \int_{\Omega'} L\{\varphi'_A(x'), \varphi'_{A,\mu}(x'), x'\} d^4x' \\ &\equiv \int_\Omega \left[L\{\varphi_A(x), \varphi_{A,\mu}(x), x\} + \frac{{}^\circ\partial L}{\partial x^\nu}\varepsilon^\nu \right] d^4x. \end{aligned}$$

ここで ${}^\circ\partial L/\partial x^\nu$ は L の中にあらわに含まれている x^ν に関する L の微分を示す．

上の等式から

$$\delta I \equiv \int_{\Omega} \frac{{}^{\circ}\partial L}{\partial x^{\nu}} \varepsilon^{\nu} d^4 x \tag{6.17}$$

となる．したがってこの場合には(5.12)″の右辺の0は，(6.17)の右辺のように書きかえねばならない．

その結果，(6.14)のかわりに

$$-[L]^A \varphi_{A,\mu} - \partial_{\nu} E^{\nu}{}_{\mu} \equiv \frac{{}^{\circ}\partial L}{\partial x^{\mu}} \tag{6.18}$$

となる．

場の方程式を使えば，保存則(6.15)の代わりに

$$\partial_{\nu} E^{\nu}{}_{\mu} = -\frac{{}^{\circ}\partial L}{\partial x^{\mu}} \tag{6.19}$$

が導かれる．

L の中に x があらわに顔を出すのは外部からの力の場，例えば磁場とか電場，あるいは地球の重力場といったような場の中に物理系が置かれている場合で，このような外力場との間のエネルギーや運動量のやり取りを示すものが(6.19)の右辺である．

6.4 Lorentz 変換と角運動量の保存則

Lorentz 変換は

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = a^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{6.20}$$

という座標変換である．定数係数 $a^{\mu}{}_{\nu}$ には

$$\eta_{\mu\nu} a^{\mu}{}_{\alpha} a^{\nu}{}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta} \tag{6.21}$$

という制約がある．特に無限小 Lorentz 変換では，無限小のパラメーター $\epsilon^{\alpha\beta}$ $(=-\epsilon^{\beta\alpha})$ を用いて

$$x'^{\mu} = (\delta^{\mu}{}_{\nu} + \epsilon^{\mu}{}_{\nu}) x^{\nu} = x^{\mu} + \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta} (\boldsymbol{f}_{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} \cdot x^{\nu} \tag{6.22}$$

と書くことができる．

ここで6個の 4 × 4 行列 $\boldsymbol{f}_{\alpha\beta} (=-\boldsymbol{f}_{\beta\alpha})$ の (μ, ν) 行列要素は

$$(\boldsymbol{f}_{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu} \stackrel{d}{\equiv} \delta^{\mu}{}_{\alpha} \eta_{\beta\nu} - \delta^{\mu}{}_{\beta} \eta_{\alpha\nu} \tag{6.23}$$

である．

(6.22)は，(6.20)の $a^{\mu}{}_{\nu}$ として

$$a^{\mu}{}_{\nu}=\delta^{\mu}{}_{\nu}+\epsilon^{\mu}{}_{\nu}$$

とおいた場合に相当する．このとき，ϵ の1次の近似で，(6.21)が成立するための条件が $\epsilon^{\alpha\beta}=-\epsilon^{\beta\alpha}$ という関係である．

変換(6.22)に対応する φ_A の変分を

$$\delta\varphi_A(x)=\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}(\boldsymbol{F}_{\alpha\beta})_A{}^B\cdot\varphi_B \tag{6.24}$$

とする．6個の $N\times N$ 行列 $\boldsymbol{F}_{\alpha\beta}(=-\boldsymbol{F}_{\beta\alpha})$ は(6.4)に相当するもので，これは(6.5)と同じ形の関係式を満足する：

$$[\boldsymbol{F}_{\alpha\beta},\boldsymbol{F}_{\rho\sigma}]=\frac{1}{2}C_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}. \tag{6.25}$$

行列 $\boldsymbol{f}_{\alpha\beta}$ についても，$\boldsymbol{F}_{\alpha\beta}$ とまったく同じ関係式

$$[\boldsymbol{f}_{\alpha\beta},\boldsymbol{f}_{\rho\sigma}]=\frac{1}{2}C_{\alpha\beta}{}^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}\boldsymbol{f}_{\mu\nu} \tag{6.26}$$

が存在する．(6.25)，(6.26)に出てきた構造定数はもちろん同じもので，これは添字の置換 $\alpha\rightleftharpoons\beta$, $\mu\rightleftharpoons\nu$, $\rho\rightleftharpoons\sigma$ のそれぞれに対して反対称であるばかりでなく，(α,β) という一対の添字を (ρ,σ) という一対といれかえても，C の値は反対の符号に変わる．これは構造定数がもつべき(6.6)の第1式の示す特性にほかならない．読者は，(6.26)に(6.23)を代入して，実際に C を計算してみるがよい．ついでに，その結果を用いて(6.6)の第2式も確かめてみることをすすめる．

さて作用積分 I が Lorentz 変換に対して不変とすれば恒等式(6.7)は

$$[L]^A\{(\boldsymbol{F}_{\alpha\beta})_A{}^B\varphi_B-\varphi_{A,\mu}(\boldsymbol{f}_{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}\}+\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left\{\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\nu}}(\boldsymbol{F}_{\alpha\beta})_A{}^B\varphi_B-E^{\nu}{}_{\mu}(\boldsymbol{f}_{\alpha\beta})^{\mu}{}_{\lambda}x^{\lambda}\right\}\equiv 0 \tag{6.27}$$

となる．

特に場の方程式を用いると，保存則

$$\partial_{\nu}J^{\nu}{}_{\alpha\beta}=0 \tag{6.28}$$

が導かれる．ここで $J^{\nu}{}_{\alpha\beta}(=-J^{\nu}{}_{\beta\alpha})$ は(6.27)の第2項の{ }の中の量で

$$J^{\nu}{}_{\alpha\beta}\overset{d}{\equiv}\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\nu}}(\boldsymbol{F}_{\alpha\beta})_A{}^B\varphi_B-(E^{\nu}{}_{\alpha}x_{\beta}-E^{\nu}{}_{\beta}x_{\alpha}) \tag{6.29}$$

である．ここで，x_α は $\eta_{\alpha\beta}x^\beta$ のことである．

(6.28) を積分することにより得られる6個の保存量を

$$R_{\alpha\beta}=-R_{\beta\alpha}\overset{d}{\equiv}-\int_{-\infty}^{\infty}J^0{}_{\alpha\beta}\,d^3x \tag{6.30}$$

とする．この中で特に R_{23}, R_{31}, R_{12} は φ 場のもつ全角運動量の x, y, z 成分を表わすことがわかる．

たとえば

$$R_{12}=\int_{-\infty}^{\infty}\left\{x_1(-E^0{}_2)-x_2(-E^0{}_1)-\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,0}}(\boldsymbol{F}_{12})_A{}^B\cdot\varphi_B\right\}d^3x$$

の第1項の $(-E^0{}_2)d^3x$ は，点 $\vec{x}$ における体積素片 d^3x の中にある φ 場のもつ運動量の y 成分を示す．したがって第1，第2項の和は流動する φ 場を座標原点から眺めた場合，各点における φ 場の流動に基因する角運動量の z 成分の総和を示す．

これに対して，第3項は φ 場自身がもつ，スピンに基づく角運動量の z 成分の総和を表わす．この項には，3次元空間の座標軸の回転に対する φ 場の変換性を表わす $\boldsymbol{F}_{12}$ という行列が含まれている．この項がスピン角運動量を表わすのは，もっぱら行列 $\boldsymbol{F}$ の存在に基づく．スピンという内部運動の自由度をもたないスカラー場では，$\boldsymbol{F}\equiv 0$ であるから，このような項はでてこない．

6.5 位相変換と電荷の保存則

電荷をもったスカラー場 $\varphi(x)$ が電磁場 A_μ と相互作用している場合を考えよう．いま φ は x の複素関数とし，これに複素共役な量を φ^* と書くことにする．この例では重力場を無視し，特殊相対論の範囲で問題を考えよう．

この物理系の Lagrange 関数を

$$L=-\frac{1}{4\mu_0 c}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}-\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu+ieA_\mu)\varphi^*\cdot(\partial_\nu-ieA_\nu)\varphi-m^2\varphi^*\cdot\varphi \tag{6.31}$$

とする．ここで添字の上げ下ろしに，$\eta^{\mu\nu}, \eta_{\mu\nu}$ を用いることは，いうまでもなかろう［ここの $f_{\mu\nu}$ は $\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu$ を示す．(6.23) の $\boldsymbol{f}_{\mu\nu}$ とは全く関係ない］．

さて (6.31) が位相変換

$$\begin{aligned}\partial\varphi &\stackrel{d}{\equiv} \varphi'(x)-\varphi(x) = e^{i\varepsilon}\varphi(x)-\varphi(x),\\ \partial\varphi^* &\stackrel{d}{\equiv} e^{-i\varepsilon}\varphi^*(x)-\varphi^*(x),\end{aligned} \tag{6.32}$$

x^μ, A_μ：不変，　ε：x に無関係なパラメーター

に対して不変であることは一目でわかる．

(6.32) の1個のパラメーター ε を無限小量と考えれば，Noether の第1定理により，1個の保存則

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \tag{6.33}$$

が導かれる．

ここで J^μ は，(6.9) に $(-ec)$ をかけたものである：

$$\begin{aligned}J^\mu &\stackrel{d}{\equiv} (-ec)\left\{\frac{\partial L}{\partial\varphi_{,\mu}}\cdot i\varphi+\frac{\partial L}{\partial\varphi^*_{,\mu}}(-i\varphi^*)\right\}\\ &= iec\{(\partial^\mu+ieA^\mu)\varphi^*\cdot\varphi-\varphi^*(\partial^\mu-ieA^\mu)\varphi\}.\end{aligned} \tag{6.34}$$

これは φ 場の作る電流密度，ならびに電荷密度を表わすベクトルで

$$Q = \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{\infty} J^0 d^3x = 一定$$

は φ 場のもつ全電気量である．

J_μ に対するこの解釈を導くには，電磁場の方程式を調べればよい．作用積分 I の A_μ に関する変分を求めると

$$\frac{1}{\mu_0}\partial_\nu f^{\mu\nu} = c\frac{\partial L}{\partial A_\mu} \tag{6.35}$$

となる．

元来は，(6.35) の右辺が電磁場の源となる J^μ の定義である．ところが，これを計算してみると，それは (6.34) の右辺と同じものであることがわかる．すなわち

$$J^\mu \stackrel{d}{\equiv} c\frac{\partial L}{\partial A_\mu} \equiv -ec\left\{\frac{\partial L}{\partial\varphi_{,\mu}}\cdot i\varphi+\frac{\partial L}{\partial\varphi^*_{,\mu}}(-i\varphi^*)\right\} \tag{6.36}$$

という恒等式が成立する．なぜ，(6.36) のような恒等式が成立するかは，もとの Lagrange 関数 (6.31) を見れば，容易に理解できよう．すなわち，(6.31) のように，$\varphi_{,\mu}$, $\varphi^*_{,\mu}$ および A_μ が

$$D_\mu\varphi \stackrel{d}{\equiv} (\partial_\mu-ieA_\mu)\varphi, \qquad (D_\mu\varphi)^* \stackrel{d}{\equiv} (\partial_\mu+ieA_\mu)\varphi^* \tag{6.37}$$

という特別な組合せで，Lagrange 関数の中に顔を出すことがその原因である．

それでは(6.37)という特別な組合せを通さずには $\varphi_{,\mu}$ や $\varphi^*{}_{,\mu}$ が L の中に登場することができないのはなぜかという疑問が生まれる．

Noether の第1定理によれば，保存則(6.33)は，(6.7)に対応する恒等式

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi}\partial\varphi+\frac{\partial L}{\partial \varphi^*}\partial\varphi^*+\left(-\frac{1}{ec}\right)\partial_\mu J^\mu \equiv 0 \tag{6.38}$$

に，φ，および φ^* のみたすべき場の方程式

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial \varphi}-\partial_\nu\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_{,\nu}}\right)=0, \qquad \frac{\delta L}{\delta \varphi^*}=0$$

を代入することにより導かれる．

一方(6.35)において，$f^{\mu\nu}=-f^{\nu\mu}$ という特別な事情のために，両辺に ∂_μ をほどこせば，(6.33)が自然に導かれる．つまり(6.33)という電荷の保存則は，φ 場の方程式を用いても導かれるが，電磁場の方程式からも出てくる．前者の方法では位相変換に対する I(あるいは L)の不変性に基づく恒等式(6.38)が同時に必要である．また後者の方法では，一見位相変換とは無関係のようにみえる $f^{\mu\nu}=-f^{\nu\mu}$ という事情が重要な役割を演じている．この二つの方法の間には当然，深い関係があると想像される．特に第2の方法で重要な役割を演じた $f^{\mu\nu}$ の反対称性は，位相変換に対する I の不変性とどんな関係があるのであろうか．この疑問，および，(6.37)という形に関する疑問，これら両方の疑問については，次の章，ならびに第III編で再び述べる．

7

任意関数に依存する変換群の場合

7.1 局所的変換

n 個の任意関数 $\xi^r(x)\,(r=1,2\cdots,n)$ に依存する変換

$$\left.\begin{aligned} x^\mu &\to x'^\mu = f^\mu(\xi, x), \\ \varphi_A(x) &\to \varphi'_A(x') = F_A(\xi, \partial\xi/\partial x, \cdots, x, \varphi) \end{aligned}\right\} \qquad (7.1)$$

に対して，(5.1) で定義された作用積分 I が不変とする．

いま，変換(7.1)は，ひとつの連続群に属する変換であるとし，ξ^r をすべて0とおくとき，(7.1)は恒等変換になるものとする．

ここで前節で扱った変換(6.1)と，うえの(7.1)との違いについて一言述べておきたい．(6.1)の ε^r が x に無関係のため，φ_A の変換(6.1)は，時空内のどこにおいても同一の変換が行なわれることを示す．これに対して(7.1)では，ξ^r の値が場所ごとに異なるから，時空内の各点ごとに，その変換には違いがある．このように場所ごとに変換が異るものを**局所的変換**(local transformation)という．

これから $\xi^r(x)$ を十分小さくとって，すべての変分を ξ^r の1次までの近似で考えることにする．また，簡単のために f^μ は $\xi^r(x)$ の関数，F_A は，ξ^r および $\partial\xi^r/\partial x^\mu$ の関数であるが，ξ の2階以上の微係数には無関係とする．このような仮定のもとでは(7.1)は次のようになる：

$$\left.\begin{aligned} \delta x^\mu &\overset{d}{\equiv} \xi^r f_r{}^\mu(x), \\ \delta\varphi_A &\overset{d}{\equiv} \xi^r F_{r,A}(x,\varphi) + \xi^r{}_{,\mu} F_r{}^\mu{}_{,A}(x,\varphi). \end{aligned}\right\} \qquad (7.1)'$$

(7.1)′ にでてきた記号は次のようなものである：

$$f_r{}^\mu(x) \overset{d}{\equiv} \frac{\partial}{\partial \xi^r} f^\mu(\xi, x)\Big|_{\xi=0},$$

$$F_{r,A}(x, \varphi) \overset{d}{\equiv} \frac{\partial}{\partial \xi^r} F_A(\xi, \partial\xi/\partial x, x, \varphi)\Big|_{\xi=0},$$

$$F_r{}^\mu{}_{,A}(x, \varphi) \overset{d}{\equiv} \frac{\partial}{\partial \xi^r{}_{,\mu}} F_A(\xi, \partial\xi/\partial x, x, \varphi)\Big|_{\xi=0}.$$

(7.1)′ を$\partial I \equiv 0$から導かれる恒等式(5.12)′ に代入すると

$$\int_\Omega \Big[[L]^A\{(F_{r,A} - \varphi_{A,\mu} f_r{}^\mu)\xi^r + F_r{}^\mu{}_{,A}\xi^r{}_{,\mu}\} + \partial_\nu \Big\{ \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\nu}} (F_{r,A}\xi^r + F_r{}^\mu{}_{,A}\xi^r{}_{,\mu}) - E^\nu{}_\mu f_r{}^\mu \xi^r \Big\} \Big] d^4x \equiv 0 \tag{7.2}$$

となる.

この式で, $[L]^A$ の係数{ }の中にある $\xi^r{}_{,\mu}$ を部分積分により書きかえると, 次のようになる：

$$\int_\Omega \Big[\xi^r \{ [L]^A (F_{r,A} - \varphi_{A,\mu} f_r{}^\mu) - \partial_\mu([L]^A F_r{}^\mu{}_{,A}) \} + \partial_\nu \{ B^\nu{}_r \xi^r + C^{\nu,\mu}{}_r \xi^r{}_{,\mu} \} \Big] d^4x \equiv 0. \tag{7.2′}$$

ここで $B^\nu{}_r$, $C^{\nu,\mu}{}_r$ は次のようなものである：

$$\left. \begin{aligned} B^\nu{}_r &\overset{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\nu}} F_{r,A} - E^\nu{}_\mu f_r{}^\mu + [L]^A F_r{}^\nu{}_{,A}, \\ C^{\nu,\mu}{}_r &\overset{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial \varphi_{A,\nu}} F_r{}^\mu{}_{,A}. \end{aligned} \right\} \tag{7.3}$$

さて, $\xi^r(x)$ は x の任意の関数であるから, 特に Ω の表面上で $\xi^r, \xi^r{}_{,\mu}$ がすべて 0 になるように選べば, (7.2)′ の∂_ν{ }の積分は 0 となる. そこで第1項だけ, すなわち

$$\int_\Omega \xi^r \{ [L]^A(\quad) - \partial(\quad) \} d^4x \equiv 0 \tag{7.4}$$

となる. これは Ω の形や位置に関係なく, また Ω の内部で, ξ^r をどのような関数に選ぼうとも, 恒に成立する等式である. そのようになるためには(7.4)の ξ^r の係数{ }が恒等的に 0 でなければならない. そこで

$$[L]^A (F_{r,A} - \varphi_{A,\mu} f_r{}^\mu) - \partial_\mu([L]^A F_r{}^\mu{}_{,A}) \equiv 0 \tag{7.5}$$

という恒等式が導かれる.

(7.5)を(7.2)′に代入すれば, (7.2)′ は

$$\int_{\Omega}\partial_\nu\{\qquad\}d^4x\equiv 0 \tag{7.6}$$

となる. これは Ω の表面上で ξ が 0 になる, ならないに関係なく成立すべき恒等式である. (7.6)が成り立つためには

$$\partial_\nu\{B^\nu{}_r\xi^r+C^{\nu,\mu}{}_r\xi^r{}_{,\mu}\}\equiv 0 \tag{7.6$'$}$$

が成立する必要がある. 結局(7.2)′というひとつの恒等式は, (7.5)および(7.6)′という2組の恒等式に分かれたことになる.

(7.6)′ の微分を実行すると, これは

$$\partial_\nu B^\nu{}_r\xi^r+(B^\mu{}_r+\partial_\nu C^{\nu,\mu}{}_r)\xi^r{}_{,\mu}+\frac{1}{2}(C^{\nu,\mu}{}_r+C^{\mu,\nu}{}_r)\xi^r{}_{,\mu\nu}\equiv 0$$

となる.

任意の点 x において, ξ^r, およびその微係数はまったく任意の値をとりうるから, 上の恒等式が成立するためには, ξ^r, およびその微分にかかっている係数がそれぞれ 0 でなければならない. したがって(7.6)′ は次の3組の恒等式に分かれる：

$$\partial_\nu B^\nu{}_r\equiv 0, \tag{7.7a}$$

$$B^\mu{}_r+\partial_\nu C^{\nu,\mu}{}_r\equiv 0, \tag{7.7b}$$

$$C^{\nu,\mu}{}_r+C^{\mu,\nu}{}_r\equiv 0. \tag{7.7c}$$

結局, (7.2)′というひとつの恒等式は, (7.5)および(7.7a, b, c)という4組の恒等式に分かれたことになる. これら4組の恒等式は I が変換群(7.1)に対して不変となるための必要条件である. しかし逆にこれらの恒等式が成立していれば, 以上の推論を逆にたどることにより I が無限小変換(7.1)′に対して不変となることがわかる.

さらに変換(7.1)が連続群をなすということが, あらかじめわかっていれば, I は(7.1)′ のみならず, (7.1)のような無限小でない変換に対しても不変となることもわかる*). それゆえ, 上述の4組の恒等式は I が変換群(7.1)に対して不変となるための必要十分条件である. この結論を定理として述べると次のよう

*) 第6章 p. 76 の脚注参照.

になる.

7.2 Noetherの第2定理

連続群に属する変換(7.1)に対して作用積分 I が不変であるための必要十分条件は4組の恒等式(7.5), (7.7a, b, c)が成立することである．これを**Noetherの第2定理**とよぼう.

さて(7.7a)は(7.7b)と(7.7c)を組み合わせれば，容易に導かれる.

$B^{\nu}{}_r$ の定義(7.3)を使うと(7.7a)は

$$\partial_\nu\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\nu}}F_{r,A}-E^{\nu}{}_{\mu}f_r{}^{\mu}\right)\equiv-\partial_\nu([L]^A F_r{}^{\nu}{}_{,A}).$$

この右辺に(7.5)を代入して $F_r{}^{\nu}{}_{,A}$ を消去すると

$$\partial_\nu\left(\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\nu}}F_{r,A}-E^{\nu}{}_{\mu}f_r{}^{\mu}\right)\equiv-[L]^A(F_{r,A}-\varphi_{A,\mu}f_r{}^{\mu}) \tag{7.8}$$

となる．これはパラメーター群の場合に求めた恒等式(6.7)とまったく同じものである.

(7.7a)，あるいは(7.8)に φ 場の方程式を用いれば，保存則

$$\partial_\nu J^{\nu}{}_r=0 \tag{7.9}$$

がでてくる．これもすでに前章で求めた(6.8)とまったく同じものである．ここで $J^{\nu}{}_r$ は

$$J^{\nu}{}_r\overset{d}{\equiv}\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\nu}}F_{r,A}-E^{\nu}{}_{\mu}f_r{}^{\mu}. \tag{7.10}$$

これも前章にでてきた(6.9)と同じものである.

(7.8), (7.9)はいずれもパラメーター群の場合にも成立するものであるが，以下に述べることは，局所的変換においてはじめて成立する特別なものである.

まず(7.7b)に場の方程式を代入すると

$$J^{\mu}{}_r=-\partial_\nu C^{\nu,\mu}{}_r$$

となる．あるいは(7.7c)を使うと

$$J^{\mu}{}_r=-\frac{1}{2}\partial_\nu(C^{\nu,\mu}{}_r-C^{\mu,\nu}{}_r) \tag{7.11}$$

と書くことができる.

そこで

$$J_r \overset{d}{\equiv} \int_{-\infty}^{\infty} J^0{}_r d^3x = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\partial_k(C^{k,0}{}_r - C^{0,k}{}_r)d^3x$$
$$= \lim \sum_{k=1}^{3}\int_S C^{0,k}{}_r d\sigma_k \tag{7.12}$$

となる．

(7.12)の S は，φ 場全体を包む大きな球の表面を表わす．また lim はこの球面を無限に大きくすることを示す．$d\sigma_k$ は表面 S の面積素片である．

(7.12)が示すように，局所的変換(7.1)に対して I が不変のときは，J_r という n 個の保存量(古典力学ではこれを運動の恒量という)は，物理系を包む無限に大きな球面上の面積分となる．したがって(6.10)とは異なり，場の方程式の厳密解を知らなくても，解の漸近的ふるまい，つまり無限遠における φ のふるまいだけがわかっていれば，J_r を計算できる．この好都合な特徴は，(7.7b)，(7.7c)という恒等式を使ってはじめて導くことのできる特性である．大域的変換の場合には，J_r を(7.12)のように書きかえることができるか否かわからない．

最後に恒等式(7.5)の意味について説明しよう．これは互いに独立であるべき N 個の場の方程式が，実は独立ではなく，この関係のために，真に独立な場の方程式の総数は $N-n$ 個しかないということを示している．その結果，独立な $N-n$ 個の方程式を解いても，その解には必ず n 個の任意関数が含まれていることになる．しかし，n 個の任意関数 $\xi^r(x)$ に依存する変換(7.1)に対して I が不変という大前提を考えれば，この結論はむしろ当然のことといえよう．このことについて少し説明しておきたい．

Hamilton の原理を用いて場の方程式を求める際に，場の量 φ_A に与える仮想的変分を $\Delta\varphi_A$ とする．これは作用積分 I の積分域 Ω の表面では 0 となるものと仮定する．

一方，無限小変換(7.1)′ によって $\varphi_A(x)$ は $\varphi'_A(x')$ に変換される．φ の仮想変分に応じて，ひきおこされる φ' の仮想変分を $\Delta\varphi'(x')$ とすれば，両者の間には

$$\Delta\varphi_A(x) = \frac{\partial\varphi_A}{\partial\varphi'_B}\Delta\varphi'_B(x')$$

という関係がある．

さて(7.1)′ に対して I は不変だから $I\equiv I'$．そこで仮想変分 $\varDelta\varphi'$ に基づく I の仮想変分を考えてみよう：

$$\varDelta I \overset{d}{\equiv} \int_{\Omega}\left[L\{\varphi(x)\}\right]^{A}\varDelta\varphi_{A}(x)d^{4}x$$
$$= \int_{\Omega'}\left[L\{\varphi(x)\}\right]^{A}\frac{\partial\varphi_{A}(x)}{\partial\varphi'_{B}(x')}\varDelta\varphi'_{B}(x')\frac{\partial(x)}{\partial(x')}d^{4}x'.$$

一方 $\varDelta I'$ は次のようなものである：

$$\varDelta I' \overset{d}{\equiv} \int_{\Omega'}\left[L\{\varphi'(x')\}\right]^{B}\varDelta\varphi'_{B}(x')d^{4}x'.$$

両者を比べると $\varDelta I\equiv\varDelta I'$ から

$$\left[L\{\varphi'(x')\}\right]^{B} \equiv \left[L\{\varphi(x)\}\right]^{A}\frac{\partial\varphi_{A}(x)}{\partial\varphi'_{B}(x')}\frac{\partial(x)}{\partial(x')}. \tag{7.13}$$

したがって，$\varphi_{A}(x)$ が場の方程式の解，すなわち

$$\left[L\{\varphi(x)\}\right]^{A} = 0, \quad (A=1,2,\cdots,N), \tag{7.14}$$

が成りたつならば，$\left[L\{\varphi'(x')\}\right]^{B}$ も 0 となる．

ここで座標変数 x' の ′ を省いて書くと

$$\left[L\{\varphi'(x)\}\right]^{B} = 0 \tag{7.15}$$

が成立する．つまり $\varphi_{A}(x)$ と同時に，$\varphi'_{A}(x)$ もまた，(7.14) とまったく同じ形の方程式の解であることがわかる．しかし $\varphi'_{A}(x)$ は，(7.1)′ により n 個の任意関数 $\xi^{r}(x)$ を含む．つまり，変換(7.1)′，あるいは(7.1)に対して I が不変ということは，必然的に，場の方程式の解が，一通りには定まらないこと，その代りに n 個の任意関数 $\xi^{r}(x)$ を含む解の一族(family)というものが存在するという結論に導く．

この結論は，独立な場の方程式の総数が n 個だけ不足することを示すもので，それが(7.5)という形で姿を現わしたわけである．なお以上の議論からわかるように恒等式(7.5)も，大域的変換に対する不変性からは導くことのできない関係式である．

8

Noether の第 2 定理の応用

8.1　ゲージ変換

Weyl の統一場理論で述べたように，彼の考えたもともとのゲージ変換にもとづく統一場理論は，具合の悪い点があったために，結局はその目的を果たさずに終った．

その後，量子力学の誕生とともに，Weyl は考えを変えて，Schrödinger の波動関数のもつ位相の不定性に着目し，彼の創造したゲージ変換に代って，Schrödinger の波動関数に対する局所的位相変換に，前者の果たした役割を担わせることにした．このような事情から，一般に複素波動関数の局所的位相変換をゲージ変換とよぶ．

さて話を本論にもどして，簡単のために，Lagrange 関数として再び (6.31) をとり上げよう．ここでも **6.5** 節と同様に，三つの場 $\varphi, \varphi^*, A_\mu$ をひとまとめに φ_A と書くのはやめ，それぞれを別々に扱う．

さて 1 個の任意関数 $\xi(x)$ を用いてゲージ変換*)

$$\varphi \to \varphi' = \varphi \exp(-ie\xi), \qquad \varphi^* \to \varphi'^* = \varphi^* \exp(ie\xi) \tag{8.1}$$

を考える．これと同時に

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \xi \tag{8.2}$$

という変換を行なえば，(6.31) は不変となる．

ここで任意関数 $\xi(x)$ を無限小とすれば，その 1 次までの近似で (8.1)，(8.2) は

*) 任意関数 ξ はただ 1 個だから，添字 r は不要となる．

$$\delta\varphi = -ie\varphi\xi, \quad \delta\varphi^* = ie\varphi^*\xi, \quad \delta A_\mu = -\xi_{,\mu}. \tag{8.3}$$

座標 x の変換は行なわないから恒等式(7.5)は次のようになる：

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}(-ie\varphi)+\frac{\partial L}{\partial\varphi^*}(ie\varphi^*)-\partial_\mu\left(-\frac{\partial L}{\partial A_\mu}\right) \equiv 0. \tag{8.4}$$

また(7.3)で定義された B, C は

$$\left.\begin{aligned} B^\nu &\stackrel{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial\varphi_{,\nu}}(-ie\varphi)+\frac{\partial L}{\partial\varphi^*_{,\nu}}(ie\varphi^*)+\frac{\partial L}{\partial A_\mu}(-\partial^\nu{}_\mu), \\ C^{\nu,\mu} &\stackrel{d}{\equiv} -\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}}. \end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

そこで恒等式(7.7c)は

$$\frac{\partial L}{\partial A_{\mu,\nu}}+\frac{\partial L}{\partial A_{\nu,\mu}} \equiv 0. \tag{8.6}$$

これは A_μ の微分が，L の中に

$$f_{\mu\nu} \stackrel{d}{\equiv} \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

という特別な組合せでのみ，顔を出すことを示すものである．事実(6.31)には，$A_{\mu,\nu}$ は $f_{\mu\nu}$ の形でのみ含まれている．(p. 82 の疑問参照)

恒等式(7.7b)は

$$ie\varphi^*\frac{\partial L}{\partial\varphi^*_{,\mu}}-ie\varphi\frac{\partial L}{\partial\varphi_{,\mu}}-\frac{\partial L}{\partial A_\mu} \equiv 0. \tag{8.7}$$

ところで電磁場の方程式 $\partial L/\partial A_\mu = 0$ はすでに述べたように

$$\frac{1}{\mu_0}\partial_\nu f^{\mu\nu} = c\frac{\partial L}{\partial A_\mu}\ \left(\stackrel{d}{\equiv} J^\mu\right) \tag{6.35}$$

となるから，(8.7)から

$$J^\mu \stackrel{d}{\equiv} c\frac{\partial L}{\partial A_\mu} \equiv ice\left(\varphi^*\frac{\partial L}{\partial\varphi^*_{,\mu}}-\varphi\frac{\partial L}{\partial\varphi_{,\mu}}\right). \tag{8.7)$'$}$$

これはすでに出てきた(6.36)にほかならない．

(6.36)のような恒等式の出てきた源泉は，(8.7)という恒等式であり，それは局所的位相変換に対する L の不変性に由来する．(p. 82 の疑問参照)

なお(8.7)はまた $\varphi_{,\mu}, \varphi^*_{,\mu}$ および A_μ が(6.37)に示したような特別な

$$D_\mu\varphi \stackrel{d}{\equiv} (\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi, \quad (D_\mu\varphi)^* \stackrel{d}{\equiv} (\partial_\mu + ieA_\mu)\varphi^* \tag{6.37}$$

という組合せでのみ L の中に登場することを示す.

一般にどんな L でも，それが(6.37)という形でのみ，$A_\mu, \varphi_{,\mu}$ および $\varphi^*_{,\mu}$ に依存するときは次の式が成りたつ：

$$\frac{\partial L}{\partial A_\mu} \equiv \frac{\partial L}{\partial(D_\nu\varphi)}\frac{\partial(D_\nu\varphi)}{\partial A_\mu} + \frac{\partial L}{\partial(D_\nu\varphi)^*}\frac{\partial(D_\nu\varphi)^*}{\partial A_\mu}.$$

これは(8.7)にほかならない.

最後に恒等式(8.4)は，φ, φ^* 場の方程式と電磁場の方程式の間に存在する関係を示す．すなわち，φ, φ^* 場に対して

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi^*} = 0$$

とおくことは，同時に電磁場に対して

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial A_\mu}\right) = 0$$

という要請をおくことにほかならない．すでに第 7 章で述べたように，場の方程式の間に恒等的関係の存在することは局所的変換に対して I が不変となる場合の特徴である.

8.2 Weyl のゲージ変換

Weyl の統一場理論を説明した第 3 章には，電荷 e をもつ質点の運動方程式(3.32)，ならびに電荷の保存則に相当する(3.33)がでてきた．これらの式の根拠となった(3.30)および(3.31)を，ここで Noether の第 2 定理を用いて導いてみよう.

まず物質場を表わす $\varphi_A(x)$ は n 次のゲージ可変量とし，これは一般座標変換に対して，ある型のテンソル場とする．これが重力場および電磁場と相互作用しているとき，その Lagrange 関数を，第 3 章にそろえて，花文字の $\mathcal{L}_\mathrm{M}$ で表わす．それの定義は

$$\mathcal{L}_\mathrm{M} \overset{d}{\equiv} \mathcal{L}_\mathrm{M}\{\varphi_A, \varphi_{A,\mu}, g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\mu}, A_\alpha\} \tag{3.26}$$

である．ここでは，もっぱら

$$I_\mathrm{M} \overset{d}{\equiv} \int_\Omega \mathcal{L}_\mathrm{M} d^4x$$

の，Weyl 変換，および一般座標変換に対する不変性だけについて考える．

まず I_{M} の Weyl 変換に対する不変性から始めよう．１個の任意関数 $\xi(x)$ を，ここでは第３章の記号に合わせて $\lambda(x)$ と書くことにする．

無限小の Weyl 変換(注：x^{μ} は変換されない)

$$\left.\begin{aligned} \delta\psi_A &\overset{d}{\equiv} e^{n\lambda}\psi_A-\psi_A=n\psi_A\cdot\lambda \\ \delta g_{\mu\nu} &\overset{d}{\equiv} e^{\lambda}g_{\mu\nu}-g_{\mu\nu}=\lambda\cdot g_{\mu\nu} \\ \delta A_{\mu} &\overset{d}{\equiv} -\partial_{\mu}\lambda \end{aligned}\right\} \tag{8.8}$$

に対して I_{M} が不変ということから，恒等式(7.5)は次のようになる：

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial\psi_A}n\psi_A+\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial g_{\mu\nu}}g_{\mu\nu}-\partial_{\mu}\left\{\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial A_{\nu}}(-\partial^{\mu}{}_{\nu})\right\}\equiv 0. \tag{8.9}$$

ここで第３章で与えた定義：

$$\mathcal{J}_{\mathrm{M}}{}^{\mu}\overset{d}{\equiv} c\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial A_{\mu}}=c\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial A_{\mu}},\qquad \mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^{\mu\nu}\overset{d}{\equiv}-2c\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial g_{\mu\nu}} \tag{8.10}$$

を使うことにする．$\mathcal{J}_{\mathrm{M}}{}^{\mu}$ は ψ_A 場の作る４元電流密度，$\mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^{\mu\nu}$ は，ψ_A 場のもつ対称エネルギー・テンソル密度である．

(8.9)に ψ_A 場の方程式

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial\psi_A}=0 \tag{8.11}$$

を代入すると

$$\partial_{\mu}\mathcal{J}_{\mathrm{M}}{}^{\mu}\equiv^{*}\frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^{\mu\nu} \tag{3.30}$$

となる．

(3.30)を導くのには，(8.11)を満足する $\psi_A(x)$ を用いたが，(3.30)の中には，その他に，A_{μ}，および $g_{\mu\nu}$ も含まれている．これらが，それぞれのみたすべき方程式の解であるなしに関係なく，(3.30)は成りたつ．したがって(3.30)は(8.11)という条件付きの恒等式ということができる．そこで無条件に成り立つ恒等式と区別するために $\equiv^{*}$ という記号を使うことにする．

次に $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ から導かれる $C^{\nu,\mu}$ は０となる．B^{ν} は

$$B^{\nu} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial \phi_{A,\nu}} n\phi_A + \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}} g_{\alpha\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial A_{\lambda}}(-\delta^{\nu}{}_{\lambda}). \tag{8.12}$$

そこで第2定理に出てくる恒等式(7.7b)は

$$B^{\nu} \equiv 0 \tag{8.13}$$

となる.

これは $\phi_{A,\mu}$, $g_{\alpha\beta,\mu}$ および A_μ が

$$D_\mu \phi_A \overset{d}{\equiv} (\partial_\mu + nA_\mu)\phi_A, \qquad D_\mu g_{\alpha\beta} \overset{d}{\equiv} (\partial_\mu + A_\mu) g_{\alpha\beta} \tag{8.14}$$

という特別な組合せでのみ $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ の中に顔を出すことを示す.

事実, そのような場合には

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial A_\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial (D_\nu \phi_A)} \frac{\partial (D_\nu \phi_A)}{\partial A_\mu} + \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial (D_\nu g_{\alpha\beta})} \frac{\partial (D_\nu g_{\alpha\beta})}{\partial A_\mu}$$

が成立する. これは(8.13)にほかならない.

次に無限小の一般座標変換

$$\left.\begin{aligned} \delta x^{\mu} &\overset{d}{\equiv} \xi^{\mu}(x), \\ \delta \phi_A &\overset{d}{\equiv} \xi^{\alpha}{}_{,\beta} F_{\alpha}{}^{\beta}{}_{,A}, \\ \delta g_{\mu\nu} &= -\xi^{\alpha}{}_{,\beta}(\delta^{\beta}{}_{\mu} g_{\alpha\nu} + \delta^{\beta}{}_{\nu} g_{\alpha\mu}), \\ \delta A_\mu &= -\xi^{\alpha}{}_{,\beta} \delta^{\beta}{}_{\mu} A_\alpha \end{aligned}\right\} \tag{8.15}$$

を考えよう.

I_{M} は変換(8.15)に対しても不変と仮定したから恒等式(7.5)は次のようになる：

$$-\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial \phi_A} \phi_{A,\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial g_{\alpha\beta}} g_{\alpha\beta,\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial A_\mu} A_{\mu,\nu}$$
$$-\partial_\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial \phi_A} F_{\nu}{}^{\mu}{}_{,A} - 2\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial g_{\alpha\mu}} g_{\alpha\nu} - \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial A_\mu} A_\nu \right\} \equiv 0.$$

これに ϕ_A 場の方程式(8.11)を代入し, さらに(8.10)という記号を使うと

$$\partial_\mu \mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta,\nu} \mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^{\alpha\beta} \equiv^{*} \partial_\mu \mathcal{J}_{\mathrm{M}}{}^{\mu} A_\nu + f_{\mu\nu} \mathcal{J}_{\mathrm{M}}{}^{\mu} \tag{8.16}$$

となる. (8.16)も(3.30)と同じ意味の条件付恒等式である.

ところで(3.6)により

$$D_\nu g_{\alpha\beta} \overset{d}{\equiv} g_{\alpha\beta,\nu} + A_\nu g_{\alpha\beta} = {}^{*}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\alpha} g_{\lambda\beta} + {}^{*}\Gamma^{\lambda}{}_{\nu\beta} g_{\alpha\lambda}$$

だから，これを用いて(8.16)の $g_{\alpha\beta,\nu}$ を書きかえると

$$\partial_\mu \mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^\mu{}_\nu - {}^*\Gamma'^\lambda{}_{\nu\alpha} g_{\lambda\beta} \mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^{\alpha\beta} + \frac{1}{2} A_\nu g_{\alpha\beta} \mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^{\alpha\beta} \equiv {}^* \partial_\mu \mathcal{J}_{\mathrm{M}}{}^\mu A_\nu + f_{\mu\nu} \mathcal{J}_{\mathrm{M}}{}^\mu.$$

左辺第3項は，(3.30)により右辺の第1項と相殺される．また左辺の第1，2項は ${}^*\nabla_\mu$ の形にまとめられて

$$ {}^*\nabla_\mu \mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^\mu{}_\nu \equiv {}^* f_{\mu\nu} \mathcal{J}_{\mathrm{M}}{}^\mu \tag{3.31}$$

となる．これは第3章の(3.31)にほかならない．

(3.30), (3.31)から質点の運動方程式を導く方法は付録Aに述べてある．

8.3 一般座標変換

Lagrange 関数として

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L} \overset{d}{\equiv} \mathcal{L}_{\mathrm{G}} + \mathcal{L}_{\mathrm{M}}, \\ &\mathcal{L}_{\mathrm{G}} \overset{d}{\equiv} -\frac{1}{2\kappa c}\sqrt{-g}R, \qquad \mathcal{L}_{\mathrm{M}} \overset{d}{\equiv} \mathcal{L}_{\mathrm{M}}(\psi_A, \psi_{A,\mu}, g_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta,\mu}) \end{aligned}\right\} \tag{8.17}$$

を考える．ここで物質場 $\psi_A(x)$ $(A=1, \cdots, l)$ はある種のテンソル場とする．

無限小の一般座標変換

$$x^\mu \to x'^\mu \overset{d}{\equiv} x^\mu + \xi^\mu(x)$$

に対して $g_{\alpha\beta}$ は

$$\delta g_{\alpha\beta} = -\xi^\lambda{}_{,\alpha} g_{\lambda\beta} - \xi^\lambda{}_{,\beta} g_{\lambda\alpha}$$

のように変換される．また ψ_A は(8.15)，つまり

$$\delta\psi_A \overset{d}{\equiv} \xi^\lambda{}_{,\mu} F_\lambda{}^\mu{}_{,A}$$

のように変換されるものとする．

ところで Noether の定理の応用について述べる前にまず，場の方程式を求めておこう．

Hamilton の原理により，ψ_A 場の方程式は

$$[\mathcal{L}_{\mathrm{M}}]^A = 0 \tag{8.18}$$

となる．

重力場の方程式も，すでに第2章で求めたように，Hamilton の原理から次のように求まる．すなわち仮想変分 $\varDelta g_{\mu\nu}$ に応じて生ずる $\varDelta I$ を0とおけばよい[(2.47)参照]：

$$\Delta I = \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\rm G}}{\partial g_{\mu\nu}} + \frac{\partial \mathcal{L}_{\rm M}}{\partial g_{\mu\nu}} \right) \Delta g_{\mu\nu} d^4x$$
$$= \int \frac{1}{2c\kappa} (\mathcal{G}^{\mu\nu} - \kappa \mathcal{T}_{\rm M}{}^{\mu\nu}) \Delta g_{\mu\nu} d^4x = 0. \tag{8.19}$$

ここで $\mathcal{G}^{\mu\nu}$, $\mathcal{T}_{\rm M}{}^{\mu\nu}$ は

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\rm G}}{\partial g_{\mu\nu}} = \frac{1}{2c\kappa} \mathcal{G}^{\mu\nu} \stackrel{d}{\equiv} \frac{1}{2c\kappa} \sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right),$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\rm M}}{\partial g_{\mu\nu}} \stackrel{d}{\equiv} -\frac{1}{2c} \mathcal{T}_{\rm M}{}^{\mu\nu}.$$

$\mathcal{T}_{\rm M}{}^{\mu\nu}$ は ψ_A 場の対称エネルギー・テンソル密度である．

ところで $\mathcal{R} = \sqrt{-g}\, R$ はつぎのように書きかえられる：

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \{ \partial_\mu \Gamma^\lambda{}_{\nu\lambda} - \partial_\lambda \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho} \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \Gamma^\rho{}_{\lambda\rho} \} \\ &= \partial_\mu \{ \sqrt{-g}\, (g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda{}_{\nu\lambda} - g^{\rho\sigma} \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}) \} - \partial_\mu (\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}) \Gamma^\lambda{}_{\nu\lambda} \\ &\quad + \partial_\mu (\sqrt{-g}\, g^{\rho\sigma}) \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma} + \mathcal{G}. \end{aligned} \tag{8.20}$$

ここで $\mathcal{G}$ は次のものを表わす：

$$\mathcal{G} \stackrel{d}{\equiv} \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} \{ \Gamma^\lambda{}_{\mu\rho} \Gamma^\rho{}_{\nu\lambda} - \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \Gamma^\rho{}_{\lambda\rho} \}. \tag{8.21}$$

(8.20) の右辺の第 2, 3 項は Γ の定義を使うと

$$(\text{第 2 項}) + (\text{第 3 項}) = -2\mathcal{G}$$

となることがわかる．

そこで結局，(8.20) は

$$\mathcal{R} = -\mathcal{G} + \partial_\mu \mathcal{D}^\mu \tag{8.22}$$

となる．ここで $\mathcal{D}^\mu$ は

$$\mathcal{D}^\mu \stackrel{d}{\equiv} \sqrt{-g}\, (g^{\mu\nu} \Gamma^\lambda{}_{\nu\lambda} - g^{\rho\sigma} \Gamma^\mu{}_{\rho\sigma}). \tag{8.23}$$

(8.22) を使うと，仮想変分 $\Delta g_{\mu\nu}$ に対する $I_{\rm G} \stackrel{d}{\equiv} \int \mathcal{L}_{\rm G} d^4x$ の変分はつぎのようになる：

$$\Delta I_{\rm G} = \frac{1}{2c\kappa} \int_\Omega (\Delta \mathcal{G} - \partial_\mu \Delta \mathcal{D}^\mu) d^4x.$$

この右辺第 2 項は積分域 Ω の表面上の積分となるから，仮想変分 $\Delta g_{\mu\nu}$ を，Ω の表面上で 0 となるように選べば，この第 2 項は 0 となる．

したがって

$$\Delta I_{\mathrm{G}}=\frac{1}{2c\kappa}\int_{\Omega}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial g_{\mu\nu}}\Delta g_{\mu\nu}d^4x.$$

これを(8.19)と比べれば

$$\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial g_{\mu\nu}}\stackrel{d}{\equiv}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial g_{\mu\nu}}-\partial_\lambda\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial g_{\mu\nu,\lambda}}\right)\equiv\mathcal{G}^{\mu\nu}. \tag{8.24}$$

話を本筋にもどそう．一般座標変換に対して I_{G} が不変であることは，すでに知っている．ここではさらに $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ から作られる作用積分 I_{M} も不変とする．したがって

$$I\stackrel{d}{\equiv}\frac{1}{2c\kappa}\int_{\Omega}(\mathcal{G}-\partial_\mu\mathcal{D}^\mu)d^4x+\int_{\Omega}\mathcal{L}_{\mathrm{M}}d^4x \tag{8.17$'$}$$

は座標変換に対して不変となる．

そこでまず I_{G} の不変性について考えよう．ここでも，一般論と異なり，$g_{\alpha\beta}$ の2階微分が登場するために，少々面倒だが，議論の進め方は一般論とまったく同じである．

まず $\bar{\delta}$ と $\partial/\partial x^\nu$ とは演算の順序を交換してもよいことに着目すると[(5.10)を参照]，(8.17)′の第1項から次のようになる：

$$\delta I_{\mathrm{G}}=\frac{1}{2c\kappa}\int\left[(\bar{\delta}\mathcal{G}-\partial_\mu\bar{\delta}\mathcal{D}^\mu)+\partial_\nu\left\{(\mathcal{G}-\partial_\mu\mathcal{D}^\mu)\delta x^\nu\right\}\right]d^4x\equiv 0.$$

一般論とまったく同じ推論により，また(8.24)を用いると，上の式は次のように書き表わされる：

$$\begin{aligned}&\frac{1}{c\kappa}\int\xi^\nu\left\{\partial_\mu(\mathcal{G}^{\mu\rho}g_{\rho\nu})-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\nu}\mathcal{G}^{\alpha\beta}\right\}d^4x\\&\quad+\frac{1}{2c\kappa}\int\partial_\nu\left\{\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}}\delta g_{\alpha\beta}-\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}}g_{\alpha\beta,\mu}-\delta^\nu{}_\mu\mathcal{G}\right)\xi^\mu\right.\\&\qquad\left.-\partial_\mu\mathcal{D}^\mu\xi^\nu-\bar{\delta}\mathcal{D}^\nu-2\mathcal{G}^{\nu\rho}g_{\rho\mu}\xi^\mu\right\}d^4x\equiv 0.\end{aligned}$$

上の二つの積分が別々に恒等的に0となることも一般論と同じである．そこで第1積分からは

$$\nabla_\mu\mathcal{G}^\mu{}_\nu\stackrel{d}{\equiv}\partial_\mu\mathcal{G}^\mu{}_\nu-\frac{1}{2}g_{\alpha\beta,\nu}\mathcal{G}^{\alpha\beta}\equiv 0. \tag{8.25}$$

これはBianchiの恒等式にほかならない．

第2積分からは

$$\partial_\nu\{B^\nu{}_\gamma\xi^\gamma + C^{\nu,\alpha}{}_\gamma\xi^\gamma{}_{,\alpha} + \mathcal{F}^{\nu(\alpha\beta)}{}_\gamma\xi^\gamma{}_{,\alpha\beta}\} \equiv 0 \tag{8.26}$$

という恒等式が導かれる．

ここで次のような定義を用いた：

$$B^\nu{}_\gamma \stackrel{d}{\equiv} -\frac{1}{c}\left(\frac{1}{\kappa}\mathcal{G}^\nu{}_\gamma + t_{\mathrm{G}}{}^\nu{}_\gamma\right) + \frac{1}{2c\kappa}\partial_\mu(\mathcal{D}^\nu\delta^\mu{}_\gamma - \mathcal{D}^\mu\delta^\nu{}_\gamma),$$

$$C^{\nu,\alpha}{}_\gamma \stackrel{d}{\equiv} \frac{1}{c\kappa}\left(-\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial g_{\alpha\rho,\nu}}g_{\gamma\rho} + \frac{\partial\mathcal{D}^\nu}{\partial g_{\alpha\rho}}g_{\gamma\rho} + \frac{\partial\mathcal{D}^\nu}{\partial g_{\alpha\rho,\tau}}g_{\gamma\rho,\tau} + \frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{D}^\nu}{\partial g_{\rho\sigma,\alpha}}g_{\rho\sigma,\gamma}\right),$$

$$\mathcal{F}^{\nu(\alpha\beta)}{}_\gamma \stackrel{d}{\equiv} \frac{1}{2c\kappa}\left(\frac{\partial\mathcal{D}^\nu}{\partial g_{\rho\alpha,\beta}} + \frac{\partial\mathcal{D}^\nu}{\partial g_{\rho\beta,\alpha}}\right)g_{\rho\gamma},$$

$$t_{\mathrm{G}}{}^\nu{}_\gamma \stackrel{d}{\equiv} \frac{1}{2\kappa}\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial g_{\alpha\beta,\nu}}g_{\alpha\beta,\gamma} - \delta^\nu{}_\gamma\mathcal{G}\right).$$

(8.26) からは，一般論にならって次の4組の恒等式が導かれる：

$$\partial_\nu B^\nu{}_\gamma \equiv 0, \tag{8.27a}$$

$$B^\nu{}_\gamma + \partial_\alpha C^{\alpha,\nu}{}_\gamma \equiv 0, \tag{8.27b}$$

$$\frac{1}{2}(C^{\alpha,\beta}{}_\gamma + C^{\beta,\alpha}{}_\gamma) + \partial_\nu\mathcal{F}^{\nu(\alpha\beta)}{}_\gamma \equiv 0, \tag{8.27c}$$

$$\mathcal{F}^{\alpha(\beta\gamma)}{}_\mu + \mathcal{F}^{\beta(\gamma\alpha)}{}_\mu + \mathcal{F}^{\gamma(\alpha\beta)}{}_\mu \equiv 0. \tag{8.27d}$$

(8.27b, c, d) から (8.27a) が導かれることも一般論の通りである．

ところで (8.27a) は，$B^\nu{}_\mu$ の定義から

$$\partial_\nu B^\nu{}_\mu \equiv -\frac{1}{c}\partial_\nu\left(\frac{1}{\kappa}\mathcal{G}^\nu{}_\mu + t_{\mathrm{G}}{}^\nu{}_\mu\right) \equiv 0 \tag{8.27a$'$}$$

となる．

これに重力場の方程式

$$\mathcal{G}^\nu{}_\mu = \kappa\mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^\nu{}_\mu \tag{8.19$'$}$$

を代入すると，

$$\partial_\nu(\mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^\nu{}_\mu + t_{\mathrm{G}}{}^\nu{}_\mu) = 0 \tag{8.28}$$

となる．

この第1項が φ_A 場のエネルギー・テンソル密度であることはすでに述べた．Einstein はこの第2項の $t_{\mathrm{G}}{}^\nu{}_\mu$ を重力場のエネルギー・テンソル密度と解釈すべきであると考えた．そのように考えれば，(8.28) は重力場およびそれと相互

作用している物質場の両者をひっくるめた全系のエネルギー・運動量の保存則を表わしていることになる．

$t_{\mathrm{G}}{}^{\nu}{}_{\mu}$ は，**重力場のエネルギー・テンソル密度**とよばれているが，これは一般座標変換に対してテンソル密度として要求される正しい変換則には従わない．つまり，t_{G} は厳密にいえば，テンソル密度ではないから，擬テンソル密度とよぶべきである．これが文字通りテンソルとしてふるまうのは，線形座標変換の場合にかぎられる．

この他にも，$t_{\mathrm{G}}{}^{\nu\mu}=g^{\mu\lambda}\cdot t_{\mathrm{G}}{}^{\nu}{}_{\lambda}$ が(ν, μ)に対して非対称であるとか，またエネルギー密度 $t_{\mathrm{G}}{}^{0}{}_{0}$ が必ずしも正の値をとるとはかぎらない等々，種々の欠点をもつ．この問題については，なお述べたいこともあるが，本書の目指すことからはずれるのでこれ以上は立ちいらぬことにする．ただ一言，$t_{\mathrm{G}}{}^{\nu}{}_{\mu}$ が今日でも，重力場のエネルギー・運動量密度を表わすものとして一般に使用されているということだけを，ここに重ねて述べておく．

(8.27b)からは

$$\frac{1}{c}\left(\frac{1}{\kappa}\mathcal{G}^{\nu}{}_{\mu}+t_{\mathrm{G}}{}^{\nu}{}_{\mu}\right)\equiv\frac{1}{2c\kappa}\partial_{\lambda}(\mathcal{D}^{\nu}\delta^{\lambda}{}_{\mu}-\mathcal{D}^{\lambda}\delta^{\nu}{}_{\mu})+\partial_{\lambda}C^{\lambda,\nu}{}_{\mu}. \qquad (8.27\mathrm{b})'$$

いま

$$C^{(\lambda,\nu)}{}_{\mu}\overset{d}{\equiv}\frac{1}{2}(C^{\lambda,\nu}{}_{\mu}+C^{\nu,\lambda}{}_{\mu}),$$

$$C^{[\lambda,\nu]}{}_{\mu}\overset{d}{\equiv}\frac{1}{2}(C^{\lambda,\nu}{}_{\mu}-C^{\nu,\lambda}{}_{\mu})$$

とおけば(8.27c)から

$$C^{(\lambda,\nu)}{}_{\mu}\equiv-\partial_{\rho}\mathcal{F}^{\rho(\lambda\nu)}{}_{\mu}.$$

これらを使うと(8.27b)′は

$$\frac{1}{c}\left(\frac{1}{\kappa}\mathcal{G}^{\nu}{}_{\mu}+t_{\mathrm{G}}{}^{\nu}{}_{\mu}\right)\equiv\frac{1}{c\kappa}\partial_{\lambda}\mathcal{D}^{[\nu}\delta^{\lambda]}{}_{\mu}$$
$$+\partial_{\lambda}C^{[\lambda,\nu]}{}_{\mu}-\frac{1}{2}\partial_{\lambda}\partial_{\rho}(\mathcal{F}^{\rho(\lambda\nu)}{}_{\mu}+\mathcal{F}^{\lambda(\rho\nu)}{}_{\mu}).$$

ここで

$$\mathscr{D}^{[\nu}\delta^{\lambda]}{}_{\mu} \overset{d}{\equiv} \frac{1}{2}(\mathscr{D}^{\nu}\delta^{\lambda}{}_{\mu} - \mathscr{D}^{\lambda}\delta^{\nu}{}_{\mu})$$

である．

ところで(8.27d)から

$$\mathscr{F}^{\rho(\lambda\nu)}{}_{\mu} + \mathscr{F}^{\lambda(\rho\nu)}{}_{\mu} \equiv -\mathscr{F}^{\nu(\lambda\rho)}{}_{\mu}.$$

いま面倒だから上の式を，右肩の添字だけを用いて

$$\rho(\lambda\nu) + \lambda(\rho\nu) \equiv -\nu(\lambda\rho)$$

と書くことにすると

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\{\rho(\lambda\nu) + \lambda(\rho\nu)\} &\equiv \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}\{\rho(\lambda\nu) + \lambda(\rho\nu)\} + 2\{-\frac{1}{2}\nu(\lambda\rho)\}\right] \\ &\equiv \frac{1}{6}\left[\{\rho(\lambda\nu) - \nu(\lambda\rho)\} + \{\lambda(\rho\nu) - \nu(\rho\lambda)\}\right].\end{aligned}$$

そこで

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\left(\frac{1}{\kappa}\mathscr{G}^{\nu}{}_{\mu} + t_{\mathrm{G}}{}^{\nu}{}_{\mu}\right) &\equiv \frac{1}{c\kappa}\partial_{\lambda}\mathscr{D}^{[\nu}\delta^{\lambda]}{}_{\mu} + \partial_{\lambda}C^{[\lambda,\nu]}{}_{\mu} \\ &\quad - \frac{1}{6}\partial_{\lambda}\partial_{\rho}\left[\{\mathscr{F}^{\rho(\lambda\nu)}{}_{\mu} - \mathscr{F}^{\nu(\lambda\rho)}{}_{\mu}\} + \{\mathscr{F}^{\lambda(\rho\nu)}{}_{\mu} - \mathscr{F}^{\nu(\rho\lambda)}{}_{\mu}\}\right]. \qquad (8.27\mathrm{b})''\end{aligned}$$

この左辺は，重力場の方程式を使えば

$$\frac{1}{c}(\mathscr{T}_{\mathrm{M}}{}^{\nu}{}_{\mu} + t_{\mathrm{G}}{}^{\nu}{}_{\mu})$$

となる．孤立系の場合には，これは，(8.28)により

$$J_{\mu} \overset{d}{\equiv} \int_{-\infty}^{\infty}(\mathscr{T}_{\mathrm{M}}{}^{0}{}_{\mu} + t_{\mathrm{G}}{}^{0}{}_{\mu})d^{3}x = \text{一定} \qquad (8.29)$$

という4個の保存量をあたえる．特にJ_0は全系の総エネルギーを表わす．

そこで，J_{μ}を求めるために(8.29)の右辺に(8.27b)″を代入すると

$$J_{\mu} = \sum_{k=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\partial_{k}\left\{\frac{1}{\kappa}\mathscr{D}^{[0}\delta^{k]}{}_{\mu} + cC^{[k,0]}{}_{\mu} - \frac{c}{3}\partial_{\lambda}(\mathscr{F}^{k,(\lambda 0)}{}_{\mu} - \mathscr{F}^{0,(\lambda k)}{}_{\mu})\right\}d^{3}x.$$

この右辺は3次元空間の座標原点を中心とする大きな球面上の面積分に書きかえられる．したがって一般論でも述べたように，場の方程式の厳密解を知らなくても，無限遠における場のふるまいがわかっていれば，J_{μ}を計算できる．

特に右辺の{ }の中で，球の半径rの-2乗に比例する項だけが，J_μに0でない有限な値を与える．しかし，そのような項を{ }の中から探し出すことはまことに厄介なことである．幸い，恒等式(8.27b)″がある．そこで(8.27b)″の左辺の中から$O(r^{-3})$の項だけを探し出せばよい．

いま総質量Mの物質が空間座標系の原点の近くに静かに局在している場合を考えよう．

その場合の$g_{\mu\nu}$が，Schwarzschildの解のように，大きなrに対して

$$g_{00} \approx -\left(1-\frac{a}{r}\right), \qquad g_{ik} \approx \left(1+\frac{a}{r}\right)\delta_{ik},$$

$$g_{0i} \approx 0, \qquad i,k=1,2,3,$$

$$a=2GM/c^2, \qquad G=\text{Newton の重力定数}$$

とする．

この場合には$k=1,2,3$に対して

$$g_{\alpha\beta,k}=O(r^{-2}), \qquad \Gamma=O(r^{-2}).$$

したがって$g_{\alpha\beta,k}$の2次同次式であるt_Gは$O(r^{-4})$となる．そこで$O(r^{-3})$となる量はわずかに$\mathcal{G}^0{}_\mu$の中の，Γの微分を含む項，すなわち

$$\frac{1}{\kappa}\sqrt{-g}\left\{g^{0\lambda}(\partial_\lambda\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha}-\partial_\alpha\Gamma^\alpha{}_{\lambda\mu})-\frac{1}{2}\delta^0{}_\mu g^{\rho\sigma}(\partial_\rho\Gamma^\alpha{}_{\sigma\alpha}-\partial_\alpha\Gamma^\alpha{}_{\rho\sigma})\right\}$$

だけとなる．

これの$r\to\infty$における漸近形を使って，J_0を求めると

$$J_0=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{2\kappa}\sum_{k,l=1}^{3}\int(g_{kl,l}-g_{ll,k})d\sigma_k=\frac{4\pi}{\kappa}a=Mc^2$$

となる．

このように，局所的変換群に対する不変性からは，大域的変換の場合にはなかったような，重要な情報が恒等式の形で与えられる．

次ぎに$I_M \overset{d}{\equiv} \int \mathcal{L}_M d^4x$の不変性について考えてみよう．これはすでに8.2節でも少し述べたが，8.2節と異なり，ここでは$\mathcal{L}_M$にはA_μは含まれていない．

まず，一般論の(7.5)に相当するものは

$$-\frac{1}{c}\nabla_\mu\mathcal{T}_M{}^\mu{}_\nu-\partial_\mu([\mathcal{L}_M]^A\cdot F_\nu{}^\mu{}_{,A})-[\mathcal{L}_M]^A\psi_{A,\nu}\equiv 0 \qquad (8.30)$$

となる.

ここで ψ_A 場の方程式(8. 18)を使えば

$$\nabla_\mu \mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^\mu{}_\nu = 0 \tag{8.31}$$

が成立する.

ところが, (8. 31)は重力場の方程式からも導くことができる. すなわち(8. 19)′と恒等式(8. 25)からも(8. 31)が出てくる. これに似たことは, すでに **8. 1** 節の電荷の保存則の場合にも出会っている.

つぎに一般論の(7. 7a, b, c)に相当する恒等式ももちろん導かれる. ただし B, C は, ここでは

$$\left.\begin{aligned} B^\mu{}_\nu &\overset{d}{\equiv} [\mathcal{L}_{\mathrm{M}}]^A \cdot F_\nu{}^\mu{}_{,A} - E_{\mathrm{M}}{}^\mu{}_\nu + \frac{1}{c}\mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^\mu{}_\nu, \\ C^{\mu,\nu}{}_\lambda &\overset{d}{\equiv} \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial \psi_{A,\mu}} F_\lambda{}^\nu{}_{,A} - 2\frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial g_{\nu\beta,\mu}} g_{\beta\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{8.32}$$

である. なお $E_{\mathrm{M}}{}^\mu{}_\nu$ は

$$E_{\mathrm{M}}{}^\mu{}_\nu \overset{d}{\equiv} \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial \psi_{A,\mu}} \psi_{A,\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}_{\mathrm{M}}}{\partial g_{\alpha\beta,\mu}} g_{\alpha\beta,\nu} - \delta^\mu{}_\nu \mathcal{L}_{\mathrm{M}}. \tag{8.33}$$

さて(7. 7c)に相当する恒等式は

$$C^{\mu,\nu}{}_\lambda + C^{\nu,\mu}{}_\lambda \equiv 0 \tag{8.34}$$

である. これの意味を考えてみよう.

まず注目すべきことは, $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ の中に含まれる $g_{\alpha\beta,\mu}$ は, 共変微分 $\nabla_\mu \psi_A$ の中に出てくる $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ という形で, $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ の中に登場するということである.

そこで(8. 17)の代わりに

$$\mathcal{L}_{\mathrm{M}} \overset{d}{\equiv} \mathcal{L}'_{\mathrm{M}}(\psi_A, \psi_{A,\mu}, g_{\alpha\beta}, \Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta}) \tag{8.17$'$}$$

と書くことにすれば, (8. 32)の $C^{\mu,\nu}{}_\lambda$ は

$$C^{\mu,\nu}{}_\lambda \overset{d}{\equiv} \frac{\partial \mathcal{L}'_{\mathrm{M}}}{\partial \psi_{A,\mu}} F_\lambda{}^\nu{}_{,A} - \frac{\partial \mathcal{L}'_{\mathrm{M}}}{\partial \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}} + \left(\frac{\partial \mathcal{L}'_{\mathrm{M}}}{\partial \Gamma^\tau{}_{\beta\nu}} g^{\tau\mu} - \frac{\partial \mathcal{L}'_{\mathrm{M}}}{\partial \Gamma^\tau{}_{\beta\mu}} g^{\tau\nu} \right) g_{\beta\lambda} \tag{8.32$'$}$$

となる.

また ψ_A はテンソルであるから, 無限小変換に対して

$$\delta\psi_A \overset{d}{\equiv} \xi^\lambda{}_{,\nu} F_\lambda{}^\nu{}_{,A} \overset{d}{\equiv} \xi^\lambda{}_{,\nu} (\boldsymbol{G}^\nu{}_\lambda)_A{}^B \cdot \psi_B \tag{8.35}$$

という線形変換をうける. ここで l 次の正方行列 $\boldsymbol{G}^\nu{}_\lambda$ は x, ψ のいずれにも無関

係な定数の行列で

$$[G^{\mu}{}_{\lambda}, G^{\nu}{}_{\rho}] = \delta^{\mu}{}_{\rho}G^{\nu}{}_{\lambda} - \delta^{\nu}{}_{\lambda}G^{\mu}{}_{\rho} \tag{8.36}$$

という関係を満足する.

(8.36)という関係は群の性質から定まるもので, ψ_A がどんなテンソルでも, (8.36)は常に成立する. そこで簡単のため ψ_A としてベクトル V_μ を考え, G を4次の行列として, 左辺の交換関係を計算すれば, (8.36)の成立することを容易にたしかめることができる.

(8.32)′ を(8.34)に代入し, さらに $F_{\lambda}{}^{\nu}{}_{,A}$ を(8.35)のように書きかえると, (8.34)は

$$\frac{\partial\mathcal{L}'_{\mathrm{M}}}{\partial\psi_{A,\mu}}(G^{\nu}{}_{\lambda}\psi)_A + \frac{\partial\mathcal{L}'_{\mathrm{M}}}{\partial\psi_{A,\nu}}(G^{\mu}{}_{\lambda}\psi)_A \equiv 2\frac{\partial\mathcal{L}'_{\mathrm{M}}}{\partial\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}} \tag{8.34$'$}$$

となる. これは $\psi_{A,\mu}$ が

$$\nabla_\mu\psi_A \stackrel{d}{\equiv} \partial_\mu\psi_A + \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}(G^{\nu}{}_{\lambda}\psi)_A \tag{8.37}$$

という特別な組合せを通して $\mathcal{L}'_{\mathrm{M}}$ の中に含まれていることを示す. (8.37)は ψ_A に対する共変微分の定義にほかならない.

そこで念のため $\mathcal{L}'_{\mathrm{M}}$ を

$$\mathcal{L}'_{\mathrm{M}} \stackrel{d}{\equiv} \mathcal{L}''_{\mathrm{M}}(\psi, \nabla_\mu\psi, g_{\alpha\beta}, \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}) \tag{8.38}$$

と書くことにする. $\mathcal{L}''_{\mathrm{M}}$ の中の Γ は, $\mathcal{L}'$ の中の Γ のうちで, $\nabla_\mu\psi$ に組み込まれずに残ったものを表わす. この $\mathcal{L}''$ を用いて $C^{\mu,\nu}{}_{\lambda}$ を計算し, これを(8.34)′ に代入すると, $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ が, $\nabla_\mu\psi$ を通さずに, あらわに $\mathcal{L}''_{\mathrm{M}}$ の中に顔を出すようなことはありえないことがわかる.

一般論の(7.7b)に相当する恒等式に ψ_A 場の方程式(8.18)を代入すると,

$$\frac{1}{c}\mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^{\mu}{}_{\nu} = E_{\mathrm{M}}{}^{\mu}{}_{\nu} - \partial_\lambda C^{[\lambda,\mu]}{}_{\nu} \tag{8.39}$$

となる. ここで

$$C^{[\lambda,\mu]}{}_{\nu} \stackrel{d}{\equiv} \frac{1}{2}(C^{\lambda,\mu}{}_{\nu} - C^{\mu,\lambda}{}_{\nu}).$$

そこで ψ_A 場のもつ全エネルギー・運動量は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^{0}{}_{\nu}d^3x = c\int_{-\infty}^{\infty}E_{\mathrm{M}}{}^{0}{}_{\nu}d^3x - c\sum_{k=1}^{3}\int\partial_k C^{[k,0]}{}_{\nu}d^3x.$$

もしφ場が空間内の一部に局在しているならば，上式右辺の第2項は0となるから，$\mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^{0}{}_{\nu}$ の積分の値は $cE_{\mathrm{M}}{}^{0}{}_{\nu}$ の積分値と一致する．

$E_{\mathrm{M}}{}^{\mu}{}_{\nu}$ はφ系の“**正準エネルギー・テンソル**”と呼ばれる．これと $\mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^{\mu}{}_{\nu}$ との関係(8.39)からもわかるように，$E_{\mathrm{M}}{}^{\mu}{}_{\nu}$ は一般座標変換に対してはテンソル密度ではない．

9

電磁場と重力場の類似点

いままでに，二，三の箇所で述べたように，電磁場と重力場の間には，いろいろとよく似ている点がある．これらを以下に列挙して，両者を統一的に記述することにどの程度の必然性，可能性があるかを考えてみよう．

まず重力場から始める．特殊相対論では，ひとつの慣性系から他のいかなる慣性系にのりかえても物理法則は不変という要請を基本原理(特殊相対性原理)のひとつとしている．慣性系同士の間の乗りかえはLorentz変換とよばれ，これは座標の線形変換であるから，大域的変換の一例である．しかしこの理論は重力場の存在する場合には適用できない．その根本的理由は以下のことである．

いま地球の表面に設けた慣性系を基準として地球重力の作用下にある物体の運動を観察したとする．このときの物体の加速度を $\vec{g}$ とする．これとは別に，宇宙のはての無重力地帯で，慣性系に対して $-\vec{g}$ の加速度で運動している非慣性系を想像しよう．この非慣性系から眺めた場合の，物体の運動の様子は，前例の地球上で観測される物体の運動とまったく同じである．したがって，それぞれの観測者が自分の近傍だけを眺めているかぎり，彼等が基準としている座標系が，これら二つのケースのいずれであるかを識別することは不可能である．

このような理由から，重力場が議論の中に登場するときは話を慣性系だけに制限することは許されない．そこで特殊相対性原理にかわって，“任意の座標変換に対し，物理法則は不変”という一般相対性原理が登場する．つまり，線形座標変換に対する不変性の要請を，一般座標変換(すなわち局所的変換)に対する不変性の要請におきかえることは重力場の導入と不可分の関係にある．

場所ごとに違った変換，つまり局所的座標変換をすれば，座標軸の方向は，

場所ごとに違ったものになる．その結果，異なった点にあるベクトルの方向の比較をしようとするとき，その成分の同異によって，方向の等しいか否かを判断するわけにはいかなくなる．そこで方向に関する情報の伝達者として，$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ という場が登場する．これが重力を表わす量である．以上が，重力論の話の筋である(第 3 章 p. 33 参照)．

局所的座標変換に対する不変性の要請から，物質場 ψ_A と重力場との結びつき方は，何の任意性もなく以下のようにきまる．

いま，無限小の局所的変換に対して ψ_A が [(8. 35) と同じ]

$$\psi_A(x) \to \psi'_A(x') = \psi_A(x) + \xi^{\rho}{}_{,\sigma}(\boldsymbol{G}^{\sigma}{}_{\rho}\psi)_A \tag{9.1}$$

という変換をうけるとする．そのとき，重力場と ψ_A の相互作用を求めるには，無重力の場合の ψ_A 場の方程式の中にでてくる $\partial_\mu\psi_A$ を [(8. 37) と同じもの]

$$\partial_\mu\psi_A \to \nabla_\mu\psi_A \stackrel{d}{\equiv} \partial_\mu\psi_A + \Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma}(\boldsymbol{G}^{\sigma}{}_{\rho}\psi)_A \tag{9.2}$$

におきかえればよい．この第 2 項が ψ と重力場の相互作用を表わす．この形は Noether の第 2 定理により不変性の要請だけから導かれる [(8. 34)$'$ を参照]．

座標変換 $x \to x'$ に対して 4 次の正方行列 $\boldsymbol{T}$ を

$$(\boldsymbol{T})^{\mu}{}_{\nu} \stackrel{d}{\equiv} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \tag{2.23}$$

と定義すれば，ベクトル V^μ は $(\boldsymbol{T}V)^\mu = (\boldsymbol{T})^{\mu}{}_{\nu} \cdot V^\nu$ に変わる．また $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ は [p. 18 の (2. 16)$'$ と同じ]

$$\boldsymbol{\Gamma}_\mu(x) \to \boldsymbol{\Gamma}'_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\left\{\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Gamma}_\nu\boldsymbol{T}^{-1} - \frac{\partial}{\partial x^\nu}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}\right\} \tag{9.3}$$

となる．ここで 4 次の行列 $\boldsymbol{\Gamma}_\mu$ の (λ, ν) 要素は

$$(\boldsymbol{\Gamma}_\mu)^{\lambda}{}_{\nu} \stackrel{d}{\equiv} \Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}(x) \tag{2.24}$$

である．

ψ_A として特にベクトル V^α をとれば，(9. 1) にでてきた $\boldsymbol{G}^{\sigma}{}_{\rho}$ は 4 次の行列となり，その (α, β) 要素は

$$(\boldsymbol{G}^{\sigma}{}_{\rho})^{\alpha}{}_{\beta} = \delta^{\alpha}{}_{\rho}\delta^{\sigma}{}_{\beta}$$

となるから，

$$\Gamma^{\rho}{}_{\mu\sigma}(\boldsymbol{G}^{\sigma}{}_{\rho})^{\alpha}{}_{\beta} = \Gamma^{\alpha}{}_{\mu\beta} = (\boldsymbol{\Gamma}_\mu)^{\alpha}{}_{\beta}. \tag{9.4}$$

そこで (9. 2) は次のように書くこともできる：

$$\nabla_\mu V^\alpha = (\partial_\mu + \boldsymbol{\Gamma}_\mu)^\alpha{}_\beta \cdot V^\beta. \tag{9.5}$$

$\nabla_\mu V^\alpha$ は変換 $x \to x'$ に対して

$$\nabla_\mu V^\alpha \to \nabla'_\mu V'^\alpha(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}(\boldsymbol{T} \cdot \nabla_\nu V)^\alpha \tag{9.6}$$

のように変換される.

(9.5) から [(2.28) と同じ]

$$\left\{[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V\right\}^\alpha = (\boldsymbol{R}_{\mu\nu})^\alpha{}_\beta \cdot V^\beta \tag{9.7}$$

が導かれる. 4 次の行列 $\boldsymbol{R}_{\mu\nu}$ の (α, β) 要素は次のようなものである:

$$(\boldsymbol{R}_{\mu\nu})^\alpha{}_\beta \overset{d}{\equiv} \left\{\partial_\mu \boldsymbol{\Gamma}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{\Gamma}_\mu + [\boldsymbol{\Gamma}_\mu, \boldsymbol{\Gamma}_\nu]\right\}^\alpha{}_\beta = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}. \tag{2.27}$$

さらに Jacobi の恒等式を使って

$$\nabla_\lambda \boldsymbol{R}_{\mu\nu} + \nabla_\mu \boldsymbol{R}_{\nu\lambda} + \nabla_\nu \boldsymbol{R}_{\lambda\mu} \equiv 0 \tag{9.8}$$

も容易に導くことができる. ここで $\nabla_\lambda \boldsymbol{R}_{\mu\nu}$ の定義は

$$(\nabla_\lambda \boldsymbol{R}_{\mu\nu})^\alpha{}_\beta = \left\{\partial_\lambda \boldsymbol{R}_{\mu\nu} + [\boldsymbol{\Gamma}_\lambda, \boldsymbol{R}_{\mu\nu}] - \Gamma^\tau{}_{\lambda\mu} \boldsymbol{R}_{\tau\nu} - \Gamma^\tau{}_{\lambda\nu} \boldsymbol{R}_{\mu\tau}\right\}^\alpha{}_\beta \tag{9.9}$$

である.

なお第 2 章 (2.36) で述べたように Bianchi の恒等式 (9.8) から [(2.36) と同じ]

$$\nabla_\mu\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right) \equiv 0 \tag{9.10}$$

も導かれる. これは重力場の法則が一般座標変換に対して不変という要請だけから導かれる恒等式で, (8.25) にほかならない.

なお重力場がみかけのもの, すなわち座標系を適当に選ぶことにより領域 Ω の全域にわたり, 重力 Γ を一挙に消去できるための必十条件は [(2.26)′ と同じ]

$$\boldsymbol{R}_{\mu\nu} = 0 \tag{9.11}$$

である.

電磁場についても上に述べたこととまったく同じことがいえる. 両者の対応を明確にするために, 荷電物質場を表わす複素関数 $\psi(x)$ を $\phi_1 + i\phi_2$ のように 2 個の実関数 $\phi_a(x)$ $(a=1, 2)$ で表わそう. いま ψ を量子力学にでてくる電子の状態関数とすれば, 複素関数 ψ の位相変換 $\psi \to \psi' = \exp(-i\varepsilon)\psi$ に対して物理法則は不変である. この位相変換は, 2 次元ベクトル ϕ_a の

$$\begin{pmatrix} \phi'_1 \\ \phi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \overset{d}{\equiv} \boldsymbol{T}(\varepsilon) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \tag{9.12}$$

という回転に相当する．ε が無限小ならば，これは

$$\phi'_a = (\mathbf{1}+\varepsilon \boldsymbol{G})_a{}^b \cdot \phi_b \tag{9.13}$$

となる．2 次の正方行列 $\boldsymbol{G}$ は

$$\boldsymbol{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

である．

回転(9.12)は，相対論の Lorentz 変換に相当する．いま ε を x の任意関数 $e\lambda(x)/\hbar$ に置き換えることにより局所的位相変換に移行すれば，(9.13)は[$\lambda(x)$ が無限小の場合]

$$\phi_a(x) \to \phi'_a(x) = \phi_a + (e/\hbar)\lambda(x)(\boldsymbol{G}\phi)_a \tag{9.1$'$}$$

となる．これは重力の場合の(9.1)に相当する．

局所的位相変換を許した結果，位相角の基準となる基線の位置は場所ごとに違ったものになり，異なる点にある 2 次元ベクトル ϕ_a の比較が不可能となる．これを可能にするために，位相に関する情報の伝達者として A_μ が登場する．また A_μ の助けをかりて，ϕ_a の微分を

$$\partial_\mu \phi_a \to \nabla_\mu \phi_a \stackrel{d}{\equiv} \partial_\mu \phi_a + (e/\hbar) A_\mu (\boldsymbol{G}\phi)_a \tag{9.2$'$}$$

のように書きかえれば，量子力学は，局所的位相変換に対しても不変となる．(9.2)′ の右辺第 2 項は A_μ 場と ϕ_a の相互作用を表わす．(9.2)′ は ϕ_a に対する“共変微分”の定義である．これは，局所的位相変換に対して物理系が不変という要請だけから導かれたものである．

なおこの不変性を保証するためには A_μ は

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda$$

という変換をしなければならないこともわかる．なお

$$\boldsymbol{A}_\mu \stackrel{d}{\equiv} A_\mu(x)\boldsymbol{G} \tag{9.4$'$}$$

と書き，さらに(9.12)にでてきた $\boldsymbol{T}(\varepsilon)$ の中の ε を有限の大きさをもつ $(e/\hbar)\lambda(x)$ におきかえたものを $\boldsymbol{T}(x)$ と書くことにすれば，上の A_μ の変換則は

$$\boldsymbol{A}_\mu \to \boldsymbol{A}'_\mu = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\mu \boldsymbol{T}^{-1} - (\hbar/e)\partial_\mu \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{T}^{-1} \tag{9.3$'$}$$

のように書き表わされる．

すでに読者は気づいていることと思うが，電磁ポテンシャル A_μ の関与する数式と，これに対応する重力場の数式には，いずれも同一の番号を賦与するこ

とし，ただ前者には右肩に $'$ をつけて区別する．この約束にしたがえば以下のような数式が，重力場の場合と同一の推論によって導かれる．

まず局所的位相変換(ゲージ変換)に対する(9.2)′の変換則は

$$\nabla_\mu \phi_a \to \nabla'_\mu \phi'_a = (\boldsymbol{T}\nabla_\mu \phi)_a. \tag{9.6$'$}$$

曲率テンソル $\boldsymbol{R}_{\mu\nu}$ に対応して

$$\{[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\phi\}_a = \frac{e}{\hbar}(\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\phi)_a, \tag{9.7$'$}$$

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}_\mu = f_{\mu\nu}\boldsymbol{G}, \qquad f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{9.7$''$}$$

Jacobi の恒等式(9.8)に対応して

$$(\partial_\lambda f_{\mu\nu} + \partial_\mu f_{\nu\lambda} + \partial_\nu f_{\lambda\mu})\boldsymbol{G} = 0. \tag{9.8$'$}$$

なお(9.10)は，一般座標変換に対して重力場の作用積分 $I_{\rm G} \overset{d}{\equiv} \int \sqrt{-g}\, R d^4x$ が不変という事実に Noether の第2定理を用いることにより導かれたものであるが，これに対応するものは

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial L_{\rm E}}{\partial A_\mu}\right) = \partial_\mu\left(-\frac{1}{\mu_0 c}\partial_\nu f^{\mu\nu}\right) \equiv 0, \tag{9.10$'$}$$

$$L_{\rm E} \overset{d}{\equiv} -\frac{1}{4\mu_0 c} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}$$

である．これは $L_{\rm E}$ がゲージ不変であるということと，Noether の第2定理から導かれる．

以上のように，重力場と電磁場の間にはかずかずの類似点が存在している．唯一の違いは，前者には等価原理という強力な原理があるが，後者にはそれに相当するものが欠けているという点である．換言すれば，Γ は重力として観測にかかるが，A_μ 自身を観測することはできない(観測可能なものは，A_μ の差だけである)ということである．しかしこのことは別として，上述のように両場に共通な点を列挙するとき，これらを統一的に記述する方法，さらにこれらの場とまったく同じような性格をもつ場の一般論を創ることは，Noether の第2定理を活用すれば，可能であると思われる．たとえば，(8.6)が $f_{\mu\nu}$ という形を，また(8.7)が(6.37)という組合せを，さらに(8.34)′が(8.37)という形を教えてくれたという事実は，すべて，われわれの進むべき道を示唆しているといえよう．第III編で，この想像を実際に遂行してみせよう．

第III編

ゲージ場の一般論

10

一般ゲージ場

10.1 一般ゲージ場の導入[10)]

ここでくりかえし強調しておきたいことは$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$および$A_\mu$が情報の伝達者であるということである．もし$\Gamma$の助けがなければ，運動する物体の速度や加速度をはじめ，すべてのテンソル量の時間・空間的な変化を記述することが不可能となる．またA_μの助けをかりないならば，電磁場の中にある電子のSchrödinger方程式を書きたくともそれは不可能である．重力の勾配$R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu}$や，電磁場の強さ$F_{\mu\nu}$とは異なり，$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$や$A_\mu$はいずれも補助的物理量とみなされているが，それにもかかわらず，重力場あるいは電磁場の作用下にある物質系の物理学を構成するにはこれらの量は必要不可欠なものである．

このように重要な場の誕生の経緯，性格，役割をならべてみるとき，もしこれら両種の場の導入法と同じような手順を踏むならば，これらと性格的によく似た場が，ほかにも発見されるに相違ないと考えられよう．おそらく，それは上述のように，情報の伝達者というだいじな役目を担い，さらに保存則に従う物理量がその発生源となるという特徴をもつに違いない．またこのように特別な性質をもつことから，重力場や電磁場と同様に，この予想される場も，宇宙の構成にとって不可欠な役割を担う基本的な場と想像される．

そこで，1) このような場の導入，2) それが作用を与える他の物質場と，いかなる形で相互作用するか，3) それは局所的変換に対して，どのような変換則にしたがうか，4) それがみたすべき場の方程式はどのようなものか，5) それの源となる物理量はどのようなものか，このような問題について，これから一般的な立場で検討してみよう．

なお第II編に述べたことを想い起こすと，上に列挙した諸問題は，すべてNoether の第2定理から導かれる恒等式をさらに詳細に検討することにより，その解答が与えられると思われる．そこで問題を以下の形で提起する．

問題

「N 個の成分をもつ $\psi_A(x)$ 場が，線形 Lie 群をなす変換*)：

$$\psi_A(x)\to\psi'_A(x)\overset{d}{\equiv}\{\boldsymbol{T}(\varepsilon)\psi\}_A\overset{d}{\equiv}T(\varepsilon)_A{}^B\cdot\psi_B \tag{10.1}$$

をうけるとき，ψ_A の作用積分

$$I\overset{d}{\equiv}\int L(\psi_A,\psi_{A,\mu})d^4x \tag{10.2}$$

が不変であるとする．ここで ε^r ($r=1,\cdots,n$) は連続パラメーターで，すべての $\varepsilon^r=0$ のとき，(10.1) は恒等変換になるものとする．

いま (10.1) の ε^r を，n 個の，x の任意関数 $\xi^r(x)$ におきかえることにより，大域的変換 (10.1) を，局所的変換

$$\psi_A(x)\to\psi'_A(x)\overset{d}{\equiv}\boldsymbol{T}\{\xi(x)\}_A{}^B\cdot\psi_B(x) \tag{10.1$'$}$$

にまで一般化したとき，ψ_A 場の作用積分が，依然として不変となるためには，ψ_A 場の Lagrange 関数をどのように修正したらよいか？」

まず (10.1) の ε^r を無限小量として，無限小変換

$$\delta\psi_A(x)\overset{d}{\equiv}\varepsilon^r G_{r,A}{}^B\cdot\psi_B(x)\overset{d}{\equiv}\varepsilon^r(\boldsymbol{G}_r\psi)_A \tag{10.3}$$

を考えよう．

変換群 (10.1) の生成元とよばれる n 個の N 次の正方行列 $\boldsymbol{G}_r$ は

$$\boldsymbol{G}_r\overset{d}{\equiv}\frac{\partial}{\partial\varepsilon^r}\boldsymbol{T}(\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0}$$

である．(10.1) が線形 Lie 群をなすということから，この $\boldsymbol{G}_r$ は

$$[\boldsymbol{G}_r,\boldsymbol{G}_s]=\boldsymbol{G}_t C_r{}^t{}_s \tag{10.4}$$

を満足する．なお $G_{r,A}{}^B\overset{d}{\equiv}(\boldsymbol{G}_r)_A{}^B$ は x,ψ のいずれにも無関係な定数である．

さて，(10.2) は，無限小変換 (10.3) に対して不変だから

*) 第II編 (6.1)$'$ の N 次の正方行列 $\boldsymbol{F}(\varepsilon)$ のかわりに，第III編では $\boldsymbol{T}$ を用いることとする．また (6.4) の $\boldsymbol{F}_r$ のかわりに，$\boldsymbol{G}_r$ という記号を用いる．

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_A}(\boldsymbol{G}_r\psi)_A+\frac{\partial L}{\partial \psi_{A,\mu}}(\boldsymbol{G}_r\partial_\mu\psi)_A\equiv 0 \tag{10.5}$$

が成立する．これは Noether の第1定理にでてきた恒等式(6.7)で $\delta x^\mu=0$ としたものである．

もし(10.3)の ε^r を $\xi^r(x)$ におきかえれば，L の変分は

$$\delta L=\{(10.5)\text{の左辺}\}\xi^r(x)+\frac{\partial L}{\partial \psi_{A,\mu}}(\boldsymbol{G}_r\psi)_A\xi^r{}_{,\mu}$$

となる．これに恒等式(10.5)を代入すると

$$\delta L=\frac{\partial L}{\partial \psi_{A,\mu}}(\boldsymbol{G}_r\psi)_A\xi^r{}_{,\mu}$$

となり，当然のことではあるが，$\xi^r{}_{,\mu}$ に比例するこの項が I の不変性を破壊する．

そこで，不変性を回復するためには，変換の際に $\xi^r{}_{,\mu}$ に比例するような項が出てくる新しい場 $B_J(x)$, $(J=1,\cdots,X)$ を導入し，それによって $\delta\psi_{A,\mu}$ から出てきた $\xi^r{}_{,\mu}$ に比例する項を相殺してもらう必要がある．

X 個の独立成分をもつ B_J の変分 δB_J の適当な線形結合により $4\times n$ 個の独立量 $\xi^r{}_{,\mu}$ を作り出すことができるためには $X\geqq 4n$ でなければならない．そこで，導入すべき場の自由度を最小限にとどめるために，B_J は $4n$ 個の成分をもつものとし，その成分を $B^r{}_\mu(x)$ $(r=1,\cdots,n,\ \mu=0,\cdots,3)$ と書くことにする．

この $B^r{}_\mu$ こそ，われわれが求めるものである．これは後にわかるように，重力場や電磁場と同じ性格の場である．これは今まで説明してきたように，長さの基準，つまりゲージとは関係ないが，このような考え方が Weyl のゲージ変換に端を発しているという歴史的理由から，創始者の Weyl に敬意を表して，今後この種の場を**一般ゲージ場**，略してゲージ場とよぶことにする．

ψ_A の局所的無限小変換

$$\psi_A(x)\to\psi'_A(x)\overset{d}{\equiv}\psi_A(x)+\xi^r(x)(\boldsymbol{G}_r\psi)_A \tag{10.6a}$$

に応じて，ゲージ場 $B^r{}_\mu$ は

$$B^r{}_\mu\to B'^r{}_\mu\overset{d}{\equiv}B^r{}_\mu+\xi^s M_{s.}{}^r{}_\mu+({}^r{}_\mu|\boldsymbol{C}|{}^\nu{}_s)\xi^s{}_{,\nu} \tag{10.6b}$$

という変換をうけるものとする．

(10.6b)の右辺の最後の項にでてきた未定の係数$(^{\cdot}.|\boldsymbol{C}|^{\cdot}.)$は $4n$ 次の正方行

列 $\boldsymbol{C}$ の要素と考えてよい．すでに述べたように，$\delta B^r{}_\mu$ の適当な線形結合により，$\xi^r{}_{,\mu}$ を導くことができるためには，$\boldsymbol{C}$ は，x には依存してもよいが，$B^r{}_\mu$ に依存してはならない〔もし依存するときは，次の(10.7)のように，$\{\boldsymbol{C}^{-1}(B)\cdot\delta B\}^r{}_\mu$ を $\delta A^r{}_\mu$ という形にまとめることができるように，一種の“積分可能”の条件を $\boldsymbol{C}^{-1}$ に課する必要がある．それがみたされれば，(10.7)以後の議論はそのまま成りたつ〕．またその逆行列 $\boldsymbol{C}^{-1}$ も存在しなければならない．

そこで今後の扱いを簡単にするために $B^r{}_\mu$ のかわりに

$$A^r{}_\mu(x) \overset{d}{\equiv} -(\boldsymbol{C}^{-1}\cdot B)^r{}_\mu \overset{d}{\equiv} -({}^r{}_\mu|\boldsymbol{C}^{-1}|{}^\nu{}_s)B^s{}_\nu(x) \tag{10.7}$$

を採用しよう．

$\boldsymbol{C}^{-1}$ が $B^r{}_\mu$ に無関係ということ，および(10.6b)から $\delta A^r{}_\mu$ は，

$$\delta A^r{}_\mu(x) \overset{d}{\equiv} \xi^s N_{s,}{}^r{}_\mu - \xi^r{}_{,\mu} \tag{10.6c}$$

となる．ここで $N_{s,}{}^r{}_\mu$ は

$$N_{s,}{}^r{}_\mu \overset{d}{\equiv} -({}^r{}_\mu|\boldsymbol{C}^{-1}|{}^\nu{}_t)M_{s,}{}^t{}_\nu \tag{10.8}$$

である．この $N_{s,}{}^r{}_\mu$ がどのような量か，それを決定することが，われわれの課題のひとつである．

さてここで ψ_A，および $A^r{}_\mu$ が相互作用している物理系の Lagrange 関数を

$$L'(\psi_A, \psi_{A,\mu}, A^r{}_\mu) \tag{10.9}$$

とする．L' の関数形をどのように選ぶかも，われわれの課題である．ところで L' の中に A の微分を入れる必要はない．なぜならば $\delta\psi_{A,\mu}$ から出てくる $\xi^r{}_{,\mu}$ に比例する都合の悪い項は，(10.6c)に与えられた δA の第2項が相殺してくれるからである．

さて無限小変換(10.6a)および(10.6c)に対して(10.9)が不変とする．この大前提から，さきに列挙した1)〜5)という問題の解答を求めてみよう．例えば3)に答えるには(10.6c)の $N_{s,}{}^r{}_\mu$ がどんなものかをみつければよい．また L' の形をみつけることは5)に答えることになる．

(10.9)が不変という仮定から

$$\delta L' \overset{d}{\equiv} \frac{\partial L'}{\partial\psi_A}\delta\psi_A + \frac{\partial L'}{\partial\psi_{A,\mu}}\partial_\mu(\delta\psi_A) + \frac{\partial L'}{\partial A^r{}_\mu}\delta A^r{}_\mu \equiv 0.$$

これに(10.6a)，(10.6c)を代入し，ξ^r，および $\xi^r{}_{,\mu}$ に比例する項をそれぞれまとめると，

$$[\cdots\cdots]_r\cdot\xi^r+[\cdots\cdots]_r{}^{\mu}\cdot\xi^r{}_{,\mu}\equiv 0$$

となる.

任意の点 x で, ξ^r, $\xi^r{}_{,\mu}$ はそれぞれ勝手な値をとりうるから，上の恒等式が成立するためには，結局，それぞれの係数が恒等的に 0 とならねばならない.

そこで第 1 項から

$$\frac{\partial L'}{\partial\psi_A}(\boldsymbol{G}_r\psi)_A+\frac{\partial L'}{\partial\psi_{A,\mu}}\partial_\mu(\boldsymbol{G}_r\psi)_A+\frac{\partial L'}{\partial A^s{}_\mu}N_{r.}{}^s{}_\mu\equiv 0. \tag{10.10}$$

また第 2 項から

$$\frac{\partial L'}{\partial\psi_{A,\mu}}(\boldsymbol{G}_r\psi)_A-\frac{\partial L'}{\partial A^r{}_\mu}\equiv 0 \tag{10.11}$$

という恒等式が導かれる. $B^r{}_\mu$ の代わりに $A^r{}_\mu$ を採用した利点は，(10.11)の第 2 項が，このように簡単になるということである.

(10.11)は $\psi_{A,\mu}$ と $A^r{}_\mu$ とが

$$\nabla_\mu\psi_A\overset{d}{\equiv}\partial_\mu\psi_A+A^r{}_\mu(\boldsymbol{G}_r\psi)_A \tag{10.12}$$

という特別な組合せで L' の中に含まれることを示している. $\nabla_\mu\psi$ を ψ の **“共変微分”** とよぶことにする*).

(10.12)は，われわれの求めている基本的場が，実は数学でいう接続係数に相当するということを示している. このことは後の(10.31)という変換性を見ればよくわかる. この場のもつ情報の伝達者という特別な性質は，まさに接続係数のもつ特性にほかならない.

いま(10.9)の形に与えられた Lagrange 関数の独立変数を $\psi, \nabla_\mu\psi, A$ に取り替えて

$$L'(\psi,\partial_\mu\psi,A)\overset{d}{\equiv}L''(\psi,\nabla_\mu\psi,A) \tag{10.9)'$$

のように置き換える.

したがって次のようなかきかえの公式が導かれる:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial L'}{\partial\psi_A}=\frac{\partial L''}{\partial\psi_A}+\frac{\partial L''}{\partial\nabla_\mu\psi_B}A^r{}_\mu(\boldsymbol{G}_r)_B{}^A,\qquad \frac{\partial L'}{\partial\psi_{A,\mu}}=\frac{\partial L''}{\partial\nabla_\mu\psi_A},\\&\frac{\partial L'}{\partial A^r{}_\mu}=\frac{\partial L''}{\partial A^r{}_\mu}+\frac{\partial L''}{\partial\nabla_\mu\psi_A}(\boldsymbol{G}_r\psi)_A.\end{aligned}\right\} \tag{10.13}$$

---

*) この名称については p. 138 を参照されたい.

これらの関係式を使うと(10.11)は次のようになる：

$$-\frac{\partial L''}{\partial A^r{}_\mu} \equiv 0. \qquad (10.11)'$$

すなわち L'' は ψ と $\nabla_\mu\psi$ のみの関数で，A はあらわには顔を出すことはできない．

次に(10.13)を(10.10)に代入すると

$$\frac{\partial L''}{\partial \psi_A}(\boldsymbol{G}_r\psi)_A+\frac{\partial L''}{\partial \nabla_\mu\psi_A}(\boldsymbol{G}_r\nabla_\mu\psi)_A$$
$$+\frac{\partial L''}{\partial \nabla_\mu\psi_A}\left\{(\boldsymbol{G}_t\psi)_A N_{r,}{}^t{}_\mu + A^s{}_\mu([\boldsymbol{G}_s, \boldsymbol{G}_r]\psi)_A\right\} \equiv 0. \qquad (10.14)$$

ところで，(10.5)は恒等式である．したがって $\psi, \partial_\mu\psi$ がどんな関数でも，それは成立する．そこで $\partial_\mu\psi$ の代わりに $\nabla_\mu\psi$ としても(10.5)は成立する．

いま，まだ形の分からない Lagrange 関数 L'' を(10.5)と同じ関数としよう．すなわち

$$L'(\psi, \partial_\mu\psi, A) \stackrel{d}{\equiv} L(\psi, \nabla_\mu\psi) \qquad (10.15)$$

と選べば，(10.14)の第1,2項の和は，恒等式(10.5)のおかげで0となる．

そこで(10.14)が恒等的に成立するためには

$$N_{r,}{}^t{}_\mu = C_r{}^t{}_s A^s{}_\mu \qquad (10.16)$$

とすればよい．これで $A^r{}_\mu$ の変換則は

$$\delta A^r{}_\mu \stackrel{d}{\equiv} \xi^s C_s{}^r{}_t A^t{}_\mu - \xi^r{}_{,\mu} \qquad (10.17)$$

のように完全に決定されたことになる．

なお無限小変換(10.6a)，および(10.17)にもとづく $\nabla_\mu\psi_A$ の変換則は，ξ^r の1次までの近似では

$$\nabla_\mu\psi_A \to \nabla'_\mu\psi_A{}' \stackrel{d}{\equiv} \partial_\mu\psi'{}_A + A'^r{}_\mu(\boldsymbol{G}_r\psi')_A$$
$$= \{(\boldsymbol{1}+\xi^r\boldsymbol{G}_r)\cdot\nabla_\mu\psi\}_A \qquad (10.18)$$

となる．これは ψ_A に対する変換則(10.6a)とまったく同じである．

変換(10.1)が線形 Lie 群であることを考えにいれると無限小変換(10.18)を積み重ねることにより，無限小でない変換(10.1)′ に対しても $\nabla_\mu\psi$ は，ψ とまったく同じ形の

$$\nabla_\mu\psi_A \to \{\boldsymbol{T}(\xi)\nabla_\mu\psi\}_A = (\nabla'_\mu\psi')_A \qquad (10.19)$$

という変換則に従うことがわかる．ここで $\xi^r(x)$ は有限の大きさをもつ任意関数である．

なお $\xi^r(x)$ が有限の場合の $A^r{}_\mu(x)$ の変換則は，(10.19) から逆に，次のように求めることができる．

すなわち (10.19) が成立するためには

$$A^r{}_\mu \boldsymbol{G}_r \to A'^r{}_\mu \boldsymbol{G}_r = A^r{}_\mu \boldsymbol{T}\boldsymbol{G}_r\boldsymbol{T}^{-1} - \partial_\mu \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1} \tag{10.20}$$

でなければならない．ここで $\boldsymbol{T}$ は

$$\boldsymbol{T}(\xi) = \exp\{\xi^r(x)\boldsymbol{G}_r\} \tag{10.21}$$

のように書き表わされる（付録 B 参照）．

変換 (10.1)′，およびそれに伴う (10.20) を**一般ゲージ変換**とよぶ．これは，$A^r{}_\mu$ が電磁ポテンシャルに似ており，また変換 (10.20) が，電磁ポテンシャルの "ゲージ変換" の一般化されたものであることに由来する．

ところで付録 (B.15) によれば

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{G}_r\boldsymbol{T}^{-1} \overset{d}{\equiv} \boldsymbol{G}_s\{\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T})\}^s{}_r \tag{10.22}$$

と書くことができる．ここにでてきた $\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T})$ という n 次の正方行列は，$\boldsymbol{T}$ の**随伴表現** (adjoint representation) とよばれるものである．

さらに，$\boldsymbol{T}$ が (10.21) のように表わされるときは，付録の (B.16) により

$$\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T}) \overset{d}{\equiv} \exp\{\xi^r(x)\cdot\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r)\} \tag{10.23}$$

と書き表わされる．n 次の正方行列 $\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r)$ を，n 個の生成元（あるいは基底）$\boldsymbol{G}_r$ から作られる **Lie 代数の随伴表現**という．なお付録 (B.18) によれば

$$(\mathrm{ad}\,\boldsymbol{G}_r)^t{}_s = C_r{}^t{}_s = -(\mathrm{ad}\,\boldsymbol{G}_s)^t{}_r \tag{10.24}$$

である．

そこで，いま n 次の正方行列 $\boldsymbol{\xi}(x)$ の (t, s) 要素を

$$\left\{\boldsymbol{\xi}(x)\right\}^t{}_s \overset{d}{\equiv} \left\{\xi^r(x)\cdot\mathrm{ad}\,\boldsymbol{G}_r\right\}^t{}_s = \xi^r(x)C_r{}^t{}_s \tag{10.25}$$

と定義すると，(10.23) は

$$\left\{\mathrm{Ad}(\boldsymbol{T})\right\}^r{}_s = \left[\exp\{\boldsymbol{\xi}(x)\}\right]^r{}_s. \tag{10.23$'$}$$

また (10.20) の右辺，第 2 項は，少し面倒な計算により

$$\partial_\mu \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{G}_r\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\boldsymbol{\xi}^n\right\}^r{}_s\cdot\xi^s{}_{,\mu}. \tag{10.26}$$

そこで，(10.20) から $\boldsymbol{G}_r$ をはずして

$$A'^r{}_\mu = (\exp \boldsymbol{\xi})^r{}_s A^s{}_\mu - \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}(\boldsymbol{\xi})^n\right\}^r{}_s \cdot \xi^s{}_{,\mu} \tag{10.27}$$

という変換則が導かれる．(10.27)で，ξ の1次までの近似を考えれば，当然のことながら(10.17)がでてくる．

なお(10.26)は次の形にも書き表わされる：

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\boldsymbol{T}(\xi)\cdot\boldsymbol{T}^{-1}(\xi) = \boldsymbol{G}_r L^{-1}(\xi)^r{}_s \frac{\partial \xi^s(x)}{\partial x^\mu}. \tag{10.26$'$}$$

この $L^{-1}(\xi)^r{}_s$ は付録(B.26)に，その定義が与えられている．

これを使うと(10.27)は

$$A'^r{}_\mu(x) = (\exp \boldsymbol{\xi})^r{}_s A^s{}_\mu(x) - L^{-1}(\xi)^r{}_s \xi^s{}_{,\mu} \tag{10.27$'$}$$

となる．

(10.26)$'$ を導くには群のパラメーターの結合則(付録Bのp.186参照)

$$c^r = f^r(b;a), \qquad a^r = f^r(0;a)$$

から出発する．これに対応する表現行列

$$\boldsymbol{T}(c) = \boldsymbol{T}(b)\cdot\boldsymbol{T}(a)$$

を b^r で微分し，すべての b^r を0とおけば

$$\left[\frac{\partial \boldsymbol{T}(c)}{\partial c^s}\frac{\partial f^s(b;a)}{\partial b^r}\right]_{b=0} = \frac{\partial}{\partial b^r}\boldsymbol{T}(b)\bigg|_{b=0}\cdot\boldsymbol{T}(a),$$

あるいは

$$\frac{\partial}{\partial a^s}\boldsymbol{T}(a)L(a)^s{}_r = \boldsymbol{G}_r\cdot\boldsymbol{T}(a)$$

となる．ここで $L(a)$ は付録(B.22)に与えられている．

両辺に右から $\boldsymbol{T}^{-1}L^{-1}(a)^r{}_t$ をかければ

$$\frac{\partial}{\partial a^t}\boldsymbol{T}(a)\cdot\boldsymbol{T}^{-1}(a) = \boldsymbol{G}_r L^{-1}(a)^r{}_t.$$

この a^t のかわりに $\xi^t(x)$ とおき，両辺に $\partial\xi^t(x)/\partial x^\mu$ をかければ(10.26)$'$ が求められる．

ついでに(10.23)$'$，すなわち $\mathrm{Ad}\,\boldsymbol{T}(\xi)$ の別の書き表わし方も述べておこう．

まず群パラメーターの結合則

$$c^r = f^r(a\cdot b;\, a^{-1})$$

に対応して

$$\boldsymbol{T}(c) = \boldsymbol{T}(a)\cdot\boldsymbol{T}(b)\cdot\boldsymbol{T}^{-1}(a)$$

が成立する．この両辺を b^r で微分すると

$$\frac{\partial}{\partial c^s}\boldsymbol{T}(c) f_p{}^s(a\cdot b\,;\,a^{-1}) f^p{}_r(a\,;\,b) = \boldsymbol{T}(a)\frac{\partial}{\partial b^r}\boldsymbol{T}(b)\cdot\boldsymbol{T}^{-1}(a).$$

ここですべての b を 0 とおけば c も $f(a\,;\,a^{-1})=0$ となる．そこで L^{-1} の定義(B. 26) を用いると，上の式は[$(a\cdot b)_{b=0}=a$ に注意]

$$\boldsymbol{G}_s L^{-1}(a)^s{}_p R(a)^p{}_r = \boldsymbol{T}(a)\boldsymbol{G}_r\boldsymbol{T}^{-1}(a).$$

これと(10. 22)を比べると

$$\{\mathrm{Ad}\,\boldsymbol{T}(a)\}^s{}_r = L^{-1}(a)^s{}_p R(a)^p{}_r \qquad (10.23)''$$

となる．もし $c^r=f^r(a\,;\,b\cdot a^{-1})$ を用いれば

$$\{\mathrm{Ad}\,\boldsymbol{T}(a)\}^s{}_r = R^{-1}(a^{-1})^s{}_p L(a^{-1})^p{}_r \qquad (10.23)'''$$

という関係も導かれる．R^{-1} の定義は付録(B. 25) に与えられている．

なお(10. 23)″ を用いると(10. 27)′ は

$$A'^r{}_\mu = L^{-1}(\xi)^r{}_s\{R(\xi)^s{}_p A^p{}_\mu - \xi^s{}_{,\mu}\} \qquad (10.27)''$$

のように書きかえることもできる．

(10. 23)″, (10. 23)‴, (10. 27)″ はいずれも後に第IV編で利用されるだいじな公式である．

さて“共変微分”(10. 12)は，重力理論における共変微分(9. 2)あるいは(8. 37)や，荷電場が電磁場内におかれたときの共変微分(9. 2)′ とよく似た形をしている．

これらの場合にまねて，(10. 12)から次の関係式が導かれる：

$$([\nabla_\mu, \nabla_\nu]\psi)_A = F^r{}_{\mu\nu}(\boldsymbol{G}_r)_A{}^B\psi_B. \qquad (10.28)$$

ここで $F^r{}_{\mu\nu}$ は重力理論の場合の $R^\rho{}_{\sigma\mu\nu}$ に，また電磁場の $f_{\mu\nu}$ に相当する．そのために曲率テンソルとか，ゲージ場の“場の強さ”とよばれる．$F^r{}_{\mu\nu}$ の定義は

$$F^r{}_{\mu\nu} \stackrel{d}{\equiv} \partial_\mu A^r{}_\nu - \partial_\nu A^r{}_\mu + C_s{}^r{}_t A^s{}_\mu A^t{}_\nu \qquad (10.29)$$

である．なお(10. 28)は重力理論の(9. 7)，電磁場の(9. 7)′ に相当する．

ところで 2 種の N 次の正方行列

$$\boldsymbol{A}_\mu \stackrel{d}{\equiv} A^r{}_\mu\boldsymbol{G}_r, \qquad \boldsymbol{F}_{\mu\nu} \stackrel{d}{\equiv} F^r{}_{\mu\nu}\boldsymbol{G}_r \qquad (10.30)$$

を考えよう．これを使うと，ψ_A の共変微分の定義(10.12)は

$$(\nabla_\mu \psi)_A \overset{d}{\equiv} (\partial_\mu + \boldsymbol{A}_\mu)_A{}^B \psi_B \tag{10.12$'$}$$

となる．また(10.20)は次のようになる*)：

$$\boldsymbol{A}_\mu \to \boldsymbol{A}'_\mu = \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\mu \boldsymbol{T}^{-1} - \partial_\mu \boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}. \tag{10.31}$$

さらに，(10.29)の両辺に $\boldsymbol{G}_r$ をかけると

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \boldsymbol{A}_\nu - \partial_\nu \boldsymbol{A}_\mu + [\boldsymbol{A}_\mu, \boldsymbol{A}_\nu] \tag{10.32}$$

となる．

(10.31)を(10.32)に代入すれば

$$\boldsymbol{F}'_{\mu\nu} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}\boldsymbol{T}^{-1} \tag{10.33}$$

となる．この両辺から $\boldsymbol{G}_r$ をはずせば，(10.22)，(10.23)を使って

$$F'^r{}_{\mu\nu} = (\mathrm{Ad}\,\boldsymbol{T})^r{}_s F^s{}_{\mu\nu} = (\exp \boldsymbol{\xi})^r{}_s F^s{}_{\mu\nu} \tag{10.33$'$}$$

となる．特に ξ^r が無限小のときは(10.33)$'$ は

$$F'^r{}_{\mu\nu} = F^r{}_{\mu\nu} + \xi^t C_t{}^r{}_s F^s{}_{\mu\nu} \tag{10.33$''$}$$

となる．

ところで無限小変換に対して

$$\psi_A \to \psi'_A = \psi_A + \xi^t G_{tA}{}^B \psi_B \tag{10.6a}$$

という変換をうける ψ_A に対し，その共変微分は，

$$\nabla_\mu \psi_A \overset{d}{\equiv} \partial_\mu \psi_A + A^t{}_\mu G_{tA}{}^B \psi_B \tag{10.12}$$

のように定義すべしという一般的処方に従えば，$F^r{}_{\mu\nu}$ の共変微分は，(10.33)$''$ から

$$\nabla_\lambda F^r{}_{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \partial_\lambda F^r{}_{\mu\nu} + A^t{}_\lambda C_t{}^r{}_s F^s{}_{\mu\nu} \tag{10.34}$$

と定義すればよい．

行列 $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ を用いて(10.34)を書きかえれば

$$\nabla_\lambda \boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \partial_\lambda \boldsymbol{F}_{\mu\nu} + [\boldsymbol{A}_\lambda, \boldsymbol{F}_{\mu\nu}] \tag{10.35}$$

となる．

(10.35)から

$$\begin{aligned}\nabla'_\lambda \boldsymbol{F}'_{\mu\nu} &\overset{d}{\equiv} \partial_\lambda \boldsymbol{F}'_{\mu\nu} + [\boldsymbol{A}'_\lambda, \boldsymbol{F}'_{\mu\nu}] \\ &= \boldsymbol{T}\nabla_\lambda \boldsymbol{F}^{\mu\nu}\boldsymbol{T}^{-1}.\end{aligned} \tag{10.36}$$

---

*) p. 18 にでてきた $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ の変換則(2.16)$'$ と(10.31)が，前者の $\partial x/\partial x'$ という係数を除けば，まったく同じ形式をしていることに注意されたい．

つまり，一般ゲージ変換に対して $\nabla_\lambda \boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ は $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ とまったく同じ変換則に従うことがわかる．この事実は $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ に対する共変微分の定義(10.34)の正しかったことを示すものといえよう．

なお(10.33)からわかるように，$F^r{}_{\mu\nu}$ の変換則には，$\xi^r{}_{,\mu}$ はでてこない．したがって ξ^r が x の関数であるなしに関係なく $F^r{}_{\mu\nu}$ は同じ形の変換則に従う．

最後に重力理論の(9.14)という恒等式にまねて(10.28)から

$$\nabla_\lambda \boldsymbol{F}_{\mu\nu}+\nabla_\mu \boldsymbol{F}_{\nu\lambda}+\nabla_\nu \boldsymbol{F}_{\lambda\mu}\equiv 0 \tag{10.37}$$

が導かれる．これは重力理論における Bianchi の恒等式にほかならない．

10.2　ゲージ場の方程式

次にゲージ場 $A^r{}_\mu$ の満足すべき場の方程式がどのようなものかを考えよう．それには Hamilton の変分原理を用いることが最もよい．

いま $A^r{}_\mu$ 場だけに依存する Lagrange 関数を

$$L_0(A^r{}_\mu,\ A^r{}_{\mu,\nu}) \tag{10.38}$$

とする．これから作られる作用積分が，ゲージ変換(10.27)あるいは(10.31)に対して不変とする．

特に無限小変換

$$A^r{}_\mu(x)\to A'^r{}_\mu(x)\overset{d}{\equiv} A^r{}_\mu+\delta A^r{}_\mu,\qquad \delta A^r{}_\mu\overset{d}{\equiv}\xi^s C_s{}^r{}_t A^t{}_\mu-\xi^r{}_{,\mu} \tag{10.17}$$

を考えるとき，これに対して L_0 が不変という要請

$$\delta L_0=\frac{\partial L_0}{\partial A^r{}_\mu}\delta A^r{}_\mu+\frac{\partial L_0}{\partial A^r{}_{\mu,\nu}}\partial_\nu(\delta A^r{}_\mu)\equiv 0 \tag{10.39}$$

から，次の3組の恒等式が導かれる．

その第1は，(10.39)の右辺で，ξ^r に比例する項：

$$\frac{\partial L_0}{\partial A^s{}_\mu}C_r{}^s{}_t A^t{}_\mu+\frac{\partial L_0}{\partial A^s{}_{\mu,\nu}}C_r{}^s{}_t A^t{}_{\mu,\nu}\equiv 0. \tag{10.40}$$

次は $\xi^r{}_{,\mu}$ に比例する項：

$$-\frac{\partial L_0}{\partial A^r{}_\mu}+\frac{\partial L_0}{\partial A^s{}_{\nu,\mu}}C_r{}^s{}_t A^t{}_\nu\equiv 0. \tag{10.41}$$

最後のものは $\xi^r{}_{,\mu\nu}$ に比例する項：

$$\frac{\partial L_0}{\partial A^r{}_{\mu,\nu}}+\frac{\partial L_0}{\partial A^r{}_{\nu,\mu}}\equiv 0 \tag{10.42}$$

である．

(10.42) は，$A^r{}_\mu$ の微分が $A^r{}_{\mu,\nu}-A^r{}_{\nu,\mu}$ という特別な組合せでのみ，L_0 の中に含まれるべきことを示す．

そこで，これから，$A^r{}_\mu$ の微分の代わりに，それから構成される曲率 $F^r{}_{\mu\nu}$ を用いて Lagrange 関数を

$$L_0(A^r{}_\mu, A^r{}_{\mu,\nu}) \overset{d}{\equiv} L_0'(A^r{}_\mu, F^r{}_{\mu\nu}) \tag{10.43}$$

のように書き表わそう．

$F^r{}_{\mu\nu}$ の定義(10.29)を思い起こすと以下の書きかえの公式が成りたつ：

$$\frac{\partial L_0}{\partial A^r{}_\mu}=2\frac{\partial L_0'}{\partial F^s{}_{\mu\nu}}C_r{}^s{}_t A^t{}_\nu+\frac{\partial L_0'}{\partial A^r{}_\mu},$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial A^r{}_{\nu,\mu}}=2\frac{\partial L_0'}{\partial F^r{}_{\mu\nu}}.$$

これらを使って(10.41)を書きかえると，L_0' が $F^r{}_{\mu\nu}$ だけの関数であることがわかる．

最後に(10.40)は $F^r{}_{\mu\nu}=-F^r{}_{\nu\mu}$ であることに注意すると

$$\frac{\partial L_0'}{\partial F^s{}_{\mu\nu}}\left\{C_r{}^s{}_t(\partial_\mu A^t{}_\nu-\partial_\nu A^t{}_\mu)-C_u{}^s{}_v C_r{}^v{}_t(A^t{}_\mu A^u{}_\nu-A^t{}_\nu A^u{}_\mu)\right\}\equiv 0$$

となる．この第 3, 4 項は，“構造定数” $C_r{}^s{}_t$ の満足すべき Lie の関係式〔付録(B. 19)参照〕

$$C_u{}^s{}_v C_r{}^v{}_t+C_r{}^s{}_v C_t{}^v{}_u+C_t{}^s{}_v C_u{}^v{}_r=0 \tag{B.19}$$

を用いて書きかえると

$$C_r{}^s{}_v C_t{}^v{}_u A^t{}_\mu A^u{}_\nu$$

となる．

そこで(10.40)は，結局つぎのようになる：

$$\frac{\partial L_0'}{\partial F^s{}_{\mu\nu}}C_r{}^s{}_t F^t{}_{\mu\nu}\equiv 0. \tag{10.44}$$

これに $\xi^r(x)$ をかければ

$$\partial L_0' = \frac{\partial L_0'}{\partial F^s{}_{\mu\nu}} \partial F^s{}_{\mu\nu} \equiv 0 \tag{10.44$'$}$$

となる．つまり，(10.40) は $L_0'(F)$ がゲージ不変という大前提そのものを示している．

ところで，すでに p. 120 で述べたように，ゲージ変換が大域的であろうと，あるいは局所的であろうと，$\partial F^s{}_{\mu\nu}$ が同じ形をしていることを想い起こすとき，(10.44)′ は次のことを教えてくれる．すなわち L_0' が大域的変換に対して不変ならば，それは局所的変換に対しても不変であるということである．同じことは ψ 場の Lagrange 関数(10.15) についても成りたつ．ψ_A と同様に，$\nabla_\mu\psi_A$ の変換則も大域的ならびに局所的双方の変換に対してまったく同じ形をしている．その結果，ψ_A 場の Lagrange 関数 $L(\psi, \nabla\psi)$ が大域的変換に対して不変ならば，それはまた局所的変換に対しても不変となる．それゆえ，この物理系が大域的ゲージ変換に対して不変という要請は，ただちに局所的ゲージ変換に対しても不変という原理にまで容易に一般化される．

Lagrange 関数がゲージ変換に対して不変という要請だけからは，L_0' の関数形についてこれ以上の情報を得ることはできない．さらにその形を決めるには，ゲージ場の原形である電磁場を手本とすればよい．その理由は次の通りである．

いま，自然単位系($\hbar=1, c=1$)を使うとき，A のディメンションは，(10.12) を見ればわかるように，[長さ]$^{-1}$, $F^r{}_{\mu\nu}$ のそれは [長さ]$^{-2}$，また Lagrange 関数は，どんなものでも [長さ]$^{-4}$ のディメンションをもたねばならない．

それゆえ，F だけを用いて [長さ]$^{-4}$ の量を作るには，F の 2 次同次式しかない．そこで一般ゲージ場の Lagrange 関数は，電磁場のそれと同じ形をしたものにかぎられるといってよい．

さて，物理学に登場する連続群は，Lorentz 群を除けば，すべて**コンパクトな半単純群**である〔付録 B. p. 199 参照〕．そのような群に対しては，**Killing 形式**とよばれる

$$\kappa_{rs} \stackrel{d}{\equiv} -\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\boldsymbol{G}_r, \mathrm{ad}\boldsymbol{G}_s) \stackrel{d}{\equiv} -C_r{}^u{}_v C_s{}^v{}_u \tag{10.45}$$

は，それから作られる n 次の行列式が $\neq 0$ であるばかりでなく，さらにパラメーター ε^r を適当に変換することにより

$$\kappa_{rs} = \delta_{rs} \qquad \text{付録(B. 40)}$$

とすることが必ずできることも証明されている.

そこで電磁場の Lagrange 関数にまねて

$$L_0' = -\frac{1}{4}\kappa_{rs}F^r{}_{\mu\nu}F^{s,\mu\nu} \tag{10. 46}$$

とおけば，これは Lorentz 変換に対し，またゲージ変換に対しても不変となる.

ここで

$$\boldsymbol{f}_{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r)F^r{}_{\mu\nu} \tag{10. 47}$$

という n 次の正方行列を考えよう．これは(10. 30)の $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ の特別な場合である. つまり(10. 30)の N 次の行列 $\boldsymbol{G}_r$ の代わりに，その随伴表現 $\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r)$ を用いたものが $\boldsymbol{f}_{\mu\nu}$ である.

$\boldsymbol{f}_{\mu\nu}$ は，ゲージ変換に対して，(10. 33)のかわりに

$$\boldsymbol{f}_{\mu\nu} \to \boldsymbol{f}'{}_{\mu\nu} = \exp(\boldsymbol{\xi})\cdot\boldsymbol{f}_{\mu\nu}\cdot\exp(-\boldsymbol{\xi}) \tag{10. 48}$$

のように変換される．これは，(10. 21)の $\boldsymbol{T}$ の中の $\boldsymbol{G}_r$ を $\mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r)$ におきかえたものを(10. 33)に代入すれば導かれる.

さて(10. 45)を(10. 46)に代入すれば

$$L_0' = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{f}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{f}^{\mu\nu}). \tag{10. 46$'$}$$

これに(10. 48)を用いると

$$\frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{f}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{f}^{\mu\nu}) = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\boldsymbol{f}'{}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{f}'^{\mu\nu})$$

となるから，L_0' は確かにゲージ不変である.

いま

$$\kappa_{rs}F^{s,\mu\nu} \overset{d}{\equiv} F_r{}^{\mu\nu} \tag{10. 49}$$

とかくことにすれば，(10. 46)がゲージ不変という事実から，$F_r{}^{\mu\nu}$ は

$$F_r{}^{\mu\nu} \to F'_r{}^{\mu\nu} = F_s{}^{\mu\nu}\cdot\exp(-\boldsymbol{\xi})^s{}_r \tag{10. 50}$$

という変換則に従うことがわかる.

$F_r{}^{\mu\nu}$ と $F^r{}_{\mu\nu}$ は互いに他に対して**反傾**(contragredient)に変換されるという(付録 B の最後の部を参照).

半単純な Lie 群では行列 κ_{rs} は逆 κ^{-1} をもつから，それを

$$\kappa_{rt}(\kappa^{-1})^{ts} = (\kappa^{-1})^{st}\kappa_{tr} = \delta^{s}{}_{r}$$

によって定義するとき，

$$\kappa_{ru}\{\exp(\boldsymbol{\xi})\}^{u}{}_{v}(\kappa^{-1})^{vs} = \{\exp(-\boldsymbol{\xi})\}^{s}{}_{r} \tag{10.51}$$

という関係が成立することが，付録(B. 42), (B. 43)に証明されている. (10. 51)の両辺に κ_{ts} をかけ，(10. 33)′ を用いれば，(10. 50)は容易に導かれる.

最後に，(10. 44)の左辺に，(10. 46)を代入すると

$$-\frac{1}{2}\kappa_{us}F^{u,\mu\nu}C_{r}{}^{s}{}_{t}F^{t}{}_{\mu\nu}.$$

ところで

$$\kappa_{us}C_{r}{}^{s}{}_{t} \overset{d}{\equiv} C_{rut}$$

とかくことにすれば，付録(B. 39)′ により，C_{rut} は添字の置換に対して完全反対称である. この性質を用いれば，Lagrange 関数(10. 46)が恒等式(10. 44)を満足していることは一目瞭然である.

ゲージ場の方程式を求めるまえに，$F_{r}{}^{\mu\nu}$ の共変微分がどのような形になるかについて述べよう.

無限小ゲージ変換に対する $F_{r}{}^{\mu\nu}$ の変換則は，(10. 50)から

$$\delta F'_{r}{}^{\mu\nu} = -F_{s}{}^{\mu\nu}(\mathrm{ad}\,\boldsymbol{G}_{u})^{s}{}_{r}\cdot\xi^{u} = -\xi^{u}\{{}^{T}(\mathrm{ad}\boldsymbol{G}_{u})\}_{r}{}^{s}\cdot F_{s}{}^{\mu\nu}, \tag{10.50$'$}$$

である. ${}^{T}(\mathrm{ad}\,\boldsymbol{G}_{u})$ の左肩の T は転位行列を示す.

そこで ξ^{u} を $A^{u}{}_{\lambda}$ におきかえるという共変微分の導き方の一般的処方(10.12)に従って

$$\nabla_{\lambda}F_{r}{}^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \partial_{\lambda}F_{r}{}^{\mu\nu} - A^{u}{}_{\lambda}\{{}^{T}(\mathrm{ad}\,\boldsymbol{G}_{u})\}_{r}{}^{s}\cdot F_{s}{}^{\mu\nu},$$

あるいは，同じことだが

$$\nabla_{\lambda}F_{r}{}^{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \partial_{\lambda}F_{r}{}^{\mu\nu} - A^{u}{}_{\lambda}C_{u}{}^{s}{}_{r}F_{s}{}^{\mu\nu}. \tag{10.52}$$

なお(10. 52)と $\nabla_{\lambda}F^{r,\mu\nu}$ の定義(10. 34)との間には

$$\nabla_{\lambda}(\kappa_{rs}F^{s,\mu\nu}) = \kappa_{rs}\nabla_{\lambda}F^{s,\mu\nu} \tag{10.53}$$

という簡単な関係が存在する. つまり定数の κ_{rs} は，それが添字 r, s をもっているにもかかわらず，∇_{λ} と順序を置きかえてもかまわない. このことは C_{urs} が 3 個の添字の置換に対して完全反対称という性質を用いれば容易に証明される.

一般ゲージ場 $A^{r}{}_{\mu}$ が，物質場 ψ_{A} と相互作用しているときは，全系の Lagrange 関数

$$L_{\mathrm{tot}} \stackrel{d}{\equiv} L_0(A^r{}_\mu, A^r{}_{\mu,\nu})+L(\psi, \nabla_\mu\psi) \tag{10.54}$$

に変分原理を適用することにより場の方程式が導かれる.

ここで

$$L_0(A, \partial A/\partial x) \stackrel{d}{\equiv} L_0'(F) \tag{10.43}$$

は，ゲージ不変な Lagrange 関数である.

$A^r{}_\mu$ に対する変分から，

$$\frac{\partial L_0}{\partial A^r{}_\mu} \stackrel{d}{\equiv} \partial_\nu \Pi_r{}^{\mu\nu} - A^t{}_\nu C_t{}^s{}_r \Pi_s{}^{\mu\nu} = -j_r{}^\mu \tag{10.55}$$

というゲージ場の方程式が導かれる．ここで

$$\left.\begin{aligned} \Pi_r{}^{\mu\nu} &\stackrel{d}{\equiv} \frac{\partial L_0}{\partial A^r{}_{\nu,\mu}} = 2\frac{\partial L_0'}{\partial F^r{}_{\mu\nu}}, \\ j_r{}^\mu &\stackrel{d}{\equiv} \frac{\partial L}{\partial A^r{}_\mu} = \frac{\partial L}{\partial(\nabla_\mu\psi)_A}(\boldsymbol{G}_r\psi)_A \end{aligned}\right\} \tag{10.56}$$

である.

L_0' がゲージ不変だから，ゲージ変換に対して $\Pi_r{}^{\mu\nu}$ と $F^r{}_{\mu\nu}$ は互いに反傾に変換される.

そこで，$\Pi_r{}^{\mu\nu}$ の共変微分は(10.52)と同じ形となるから，(10.55)は，次のように書くことができる:

$$\nabla_\nu \Pi_r{}^{\mu\nu} = -j_r{}^\mu. \tag{10.55$'$}$$

この j が最初に掲げた課題5)の答である.

ところで L_0 がゲージ不変であるという仮定から，Noether の第2定理の恒等式(7.5)に対応して

$$\partial_\mu[L_0]_r{}^\mu + A^t{}_\mu C_r{}^s{}_t[L_0]_s{}^\mu \equiv 0 \tag{10.57}$$

が成りたつ．ここで

$$[L_0]_r{}^\mu \stackrel{d}{\equiv} \frac{\partial L_0}{\partial A^r{}_\mu} \stackrel{d}{\equiv} \nabla_\nu \Pi_r{}^{\mu\nu} \tag{10.58}$$

である.

(10.58)によれば，$[L_0]_r{}^\mu$ も，ゲージ変換に対して $F^r{}_{\mu\nu}$ とは反傾，$\Pi_r{}^{\mu\nu}$ とは共傾に変換されるから，(10.57)を

$$\nabla_\mu\nabla_\nu \Pi_r{}^{\mu\nu} \equiv 0 \tag{10.57$'$}$$

と書くことができる．そこで(10. 55)′ から

$$\nabla_\mu j_r{}^\mu = 0 \tag{10.59}$$

となる．

(10. 59) は，$L(\psi, \nabla_\mu\psi)$ のゲージ不変性からも導くことができる．そのときは，場の方程式として (10. 55)′ ではなく，ψ の方程式

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_A} = 0$$

を用いればよい．

また Noether の定理の (7. 7a, b, c) に対応して，L_0 の不変性から

$$\partial_\mu J_r{}^\mu \equiv 0, \tag{10.60a}$$

$$J_r{}^\mu + \partial_\nu \Pi_r{}^{\mu\nu} \equiv 0, \tag{10.60b}$$

および

$$\Pi_r{}^{\mu\nu} + \Pi_r{}^{\nu\mu} \equiv 0 \tag{10.60c}$$

が導かれる．

ここで (7. 3) の $B^\nu{}_r, C^{\nu,\mu}{}_r$ は，それぞれ本節の $J_r{}^\nu, \Pi_r{}^{\nu\mu}$ に相当する．特に $J_r{}^\nu$ は

$$J_r{}^\nu \overset{d}{\equiv} \frac{\partial L_0}{\partial A^s{}_{\mu,\nu}} C_r{}^s{}_t A^t{}_\mu - [L_0]_r{}^\nu. \tag{10.61}$$

これに場の方程式(10. 55) を代入すると

$$J_r{}^\nu = j_r{}^\nu - A^t{}_\mu C_t{}^s{}_r \Pi_s{}^{\nu\mu} \tag{10.62}$$

となる．これを (10. 60a) に代入すると

$$\partial_\nu (j_r{}^\nu - A^t{}_\mu C_t{}^s{}_r \Pi_s{}^{\nu\mu}) = 0. \tag{10.63}$$

すなわち，(10. 62) という $J_r{}^\nu$ は，(10. 63) あるいは (10. 60a) という連続方程式を満足するから，

$$Q_r \overset{d}{\equiv} \iiint_V J_r{}^0 d^3x \tag{10.64}$$

は n 個の保存量であることがわかる．

なお (10. 60b) を使えば，(10. 60c) のおかげで

$$Q_r = -\iiint_V \sum_{k=1}^{3} \partial_k \Pi_r{}^{0k} d^3x = -\sum_{k=1}^{3} \iint_S \Pi_r{}^{0k} d\sigma_k. \tag{10.65}$$

ここで V は全系を包含する大きな3次元的空間領域を，また S はそれの表面，さらに $d\sigma_k (k=1,2,3)$ は，S の面積素片を示す．

(10.65)によれば，保存量 Q_r を求めるには，ゲージ場 $A^r{}_\mu$ の厳密解を知る必要はなく，この物理系から遠く離れた場所における漸近的ふるまいだけを知っておれば，それで十分であることがわかる．

さて，ここで Q_r という物理量を，おかしな名前だが，かりに“ゲージ荷”とよぶことにしよう．

物質場 ψ のもつゲージ荷が作る“ゲージ流” $j_r{}^\mu$ は(10.59)という方程式をみたす．この式はゲージ変換に対して $F^r{}_{\mu\nu}$ と反傾な変換をうける．しかし，$j_r{}^0$ から作られるゲージ荷の総量は保存しない．なぜならば，(10.62)の右辺第2項が表わすように，A 場自身がゲージ荷をもち，A, ψ 両場の間にゲージ荷のやり取りがあるからである．

そこで保存則は(10.63)という形になるが，これはゲージ変換に対して，(10.59)のような見通しのよい変換則にしたがわない．しかしこれは，(10.59)を書きかえ，L_0 のゲージ不変性を使えば導かれるので，(10.59)と同等の式である．

ここに述べたことによく似た事情は，すべて一般相対論において，重力場のエネルギーに関する議論でよく知っていることである．全ゲージ荷 Q_r が(10.65)のように無限に大きな球の表面にわたる面積積分に書かれることも，重力場の議論にでてきたことである．

特にこの表面積分の議論は，重力場の際はいささか面倒だが，この一般ゲージ場の議論では(10.60a, b, c)という恒等式が簡単な形をしているので，まことに理解しやすい．

最後に一寸蛇足を付け加えよう．場の方程式(10.55)の左辺の第2項を右辺に移すと，電磁場の方程式にそっくりの式が導かれる：

$$\partial_\nu \Pi_r{}^{\mu\nu} = -(j_r{}^\mu - A^t{}_\nu C_t{}^s{}_r \Pi_s{}^{\mu\nu}).$$

この右辺は(10.62)により $-J_r{}^\mu$ に等しい．この第2項を見ればわかるように，ゲージ場が“ゲージ荷”をもっているためにゲージ場自身の源の役割もつとめる．これは非可換群に伴うゲージ場(これを**非可換ゲージ場**という)の特徴である．

以上で一般論の説明を打ち切り，次の章でゲージ場の2,3の例について述べよう．

11

一般ゲージ場の例

11.1 電磁場

電磁場についてはすでにしばしば説明しているから，ごく簡単に述べる．

荷電物質場を複素関数 $\phi(x)=\phi_1(x)+i\phi_2(x)$ で表わすとしよう．$\phi_a(a=1,2)$ は実関数である．(ϕ_1, ϕ_2) が属する2次元ベクトル空間の基準軸の回転に応じて ϕ_a は

$$\begin{pmatrix}\phi'_1\\ \phi'_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varepsilon & \sin\varepsilon\\ -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} \tag{11.1}$$

に変換される．回転角 ε が無限小のときは ε の1次までの近似で

$$\begin{pmatrix}\phi'_1\\ \phi'_2\end{pmatrix}=(1+\varepsilon \boldsymbol{G})\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} \tag{11.2}$$

となる．$\boldsymbol{G}$ は

$$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

である．以上は第9章 p. 107 に述べた通りである．

ここで変換(11.1)は一個のパラメーター ε だけに依存するから，これは Abel 群(可換群のこと)である．

その生成元は $\boldsymbol{G}$ である．したがって構造定数 $C_r{}^t{}_s$ はもちろん0となる．

そこで一般論の処方に従えば，局所的変換は，パラメーター ε を $\xi(x)\overset{d}{\equiv}e\lambda(x)$ におきかえることにより

$$\phi\rightarrow\phi'=(1+e\lambda(x)\boldsymbol{G})\phi \tag{11.3}$$

となる．

またゲージ場を $eA_\mu(x)$ とかけば，その変換則は

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \lambda. \tag{11.4}$$

この変換則は，$\lambda(x)$ が無限小でなくても，同じ形の関係式となる．

ψ の共変微分は (9.2)′ に与えられたように

$$\nabla_\mu \phi_a = \{(\partial_\mu + eA_\mu \boldsymbol{G})\phi\}_a. \tag{11.5}$$

曲率 $f_{\mu\nu}$ は (9.7)″ のようになる．すなわち $C_r{}^t{}_s$ が 0 となるので，$A_\mu A_\nu$ のような項は顔を出さない．

11.2 Yang-Mills 場

陽子と中性子を一緒にして $\psi_a(x)$ $(a=1,2)$ で表わす．$a=1$ が陽子状態，$a=2$ が中性子状態を表わすものとする．

核子と電磁場との相互作用や，レプトンとの弱い相互作用を考えに入れないときは，アイソスピン空間の中の基準軸の回転に対して，ψ_a 場の従うべき物理法則は不変である．

この場合，ψ_a は

$$\psi_a \to \psi'_a = \{\boldsymbol{T}(\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3)\psi\}_a \tag{11.6}$$

という変換をうける．2 次の正方行列 $\boldsymbol{T}$ は，3 個のパラメーター ε^r $(r=1,2,3)$ に依存し，これは線形 Lie 群 $SU(2)$ に属するユニタリー行列である．

特に無限小の ε^r のときは (11.6) は

$$\psi'_a = \{(1+\varepsilon^r \boldsymbol{G}_r)\psi\}_a \tag{11.7}$$

となる．本書では生成元 $\boldsymbol{G}_r$ を

$$\boldsymbol{G}_1 = \frac{i}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{G}_2 = \frac{i}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{G}_3 = \frac{i}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{11.8}$$

と定義する．つまり $\boldsymbol{G}_r$ はすべて反エルミット行列である．

(11.8) という定義から構造定数 $C_r{}^t{}_s$ は

$$C_r{}^s{}_t \equiv \mathrm{ad}(\boldsymbol{G}_r)^s{}_t = \frac{1}{\sqrt{2}}\epsilon_{rst}. \tag{11.9}$$

ここで

$$\epsilon_{rst}\begin{cases}+1 & :(r,s,t)\to(1,2,3)\text{ が偶置換のとき,}\\ -1 & :(r,s,t)\to(1,2,3)\text{ が奇置換のとき,}\\ 0 & :\text{その他の場合.}\end{cases}$$

そこで Killing 形式は

$$\kappa_{rs}\overset{d}{\equiv}-\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\,\boldsymbol{G}_r\cdot\mathrm{ad}\,\boldsymbol{G}_s)=\delta_{rs}. \tag{11.10}$$

ψ_a の共変微分は，(11.7) から

$$\nabla_\mu\psi\overset{d}{\equiv}\{\partial_\mu+A^r{}_\mu\boldsymbol{G}_r\}\psi. \tag{11.11}$$

またゲージ場 $A^r{}_\mu$(これが **Yang-Mills 場**である)の変換性は無限小の任意関数 $\xi^r(x)$ に対しては

$$\delta A^r{}_\mu\overset{d}{\equiv}\xi^s C_s{}^r{}_t A^t{}_\mu-\xi^r{}_{,\mu} \tag{11.12}$$

となる.

$\xi^r(x)$ が有限の大きさをもつときは，(10.30) にならって

$$\boldsymbol{A}_\mu\overset{d}{\equiv}A^r{}_\mu(x)\boldsymbol{G}_r$$

とおけば，(10.31) に従って

$$\boldsymbol{A}_\mu\to\boldsymbol{A}'_\mu=\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_\mu\boldsymbol{T}^{-1}-\partial_\mu\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1} \tag{11.13}$$

となる．ここで $\boldsymbol{T}$ は(11.6)にでてきた $\boldsymbol{T}$ の ε^r を $\xi^r(x)$ におきかえたもので，$\boldsymbol{G}_r$ を用いて

$$\boldsymbol{T}\{\xi(x)\}\overset{d}{\equiv}\exp\{\xi^r(x)\boldsymbol{G}_r\}$$

のように書きあらわされる.

曲率 $F^r{}_{\mu\nu}$ も一般論とまったく同じ形式で定義されるからこれ以上の話は割愛する.

11.3　重力場(その1)

Lorentz 不変を，さらに一般化してアフィン変換，つまり座標系の一次変換に対する不変という要請にまで強化し，さらに，それを局所的変換，つまり一般座標変換に対する不変性の要請に置きかえることにより，一般ゲージ場の一例として重力場 $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ が導かれることを示そう.

$\varphi_A(x)$ は，Lorentz 変換に対して，あるテンソル場であるとする．その作用積分を

$$I \overset{d}{\equiv} \int L(\varphi_A, \varphi_{A,\mu}, \eta_{\mu\nu}) d^4x$$

とする．

ここで Lorentz 変換

$$x^\mu \to x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu \tag{11.14}$$

に対して，I は不変と仮定する．(11.14) の係数 $a^\mu{}_\nu$ が次の条件

$$\eta_{\alpha\beta} a^\alpha{}_\mu a^\beta{}_\nu = \eta_{\mu\nu} \tag{11.15}$$

を満足すべきことは，いうまでもない．

このような L の場合は，Lorentz 不変性をさらに一般化して，(11.14) と同じ形の，任意の一次変換に対しても I が不変となるように，L を書きかえることが容易にできる．ただしその場合には変換係数 $a^\mu{}_\nu$ は，もはや (11.15) のような条件を満足する必要はない．唯一の制限は行列 $a^\mu{}_\nu$ が逆行列をもつということだけである．

したがって計量テンソル $\eta_{\mu\nu}$ は，もはや Minkowski 型ではなく，変換ごとにその成分の値も変化する．そこで，もとの $\eta_{\mu\nu}$ と区別するために，新しい計量テンソルを $\gamma_{\mu\nu}$，その逆を $\gamma^{\mu\nu}$ とかくことにする*)．

ここで無限小の一次変換

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \varepsilon^\mu{}_\nu x^\nu \tag{11.16}$$

を考えよう．

これに対して φ_A は $\varphi_A \to \varphi_A + \delta\varphi_A$ となる．$\delta\varphi_A$ は

$$\delta\varphi_A \overset{d}{\equiv} \varepsilon^\rho{}_\sigma (\boldsymbol{G}^\sigma{}_\rho)_A{}^B \varphi_B = \varepsilon^\rho{}_\sigma (\boldsymbol{G}^\sigma{}_\rho \cdot \varphi)_A \tag{11.17}$$

である．16 個の N 次の正方行列 $\boldsymbol{G}^\sigma{}_\rho$ は，アフィン変換 (11.14) の生成元の N 次の表現行列である．

(11.16) に対して $\gamma_{\mu\nu}$ や dx^μ, ∂_μ には次のような変分が引き起こされる：

$$\left.\begin{aligned}
\delta\gamma_{\mu\nu} &= -\varepsilon^\rho{}_\mu \gamma_{\rho\nu} - \varepsilon^\rho{}_\nu \gamma_{\rho\mu}, \\
\delta(dx^\mu) &= \varepsilon^\mu{}_\nu dx^\nu, \\
\delta(d^4x) &= \varepsilon^\rho{}_\rho \cdot d^4x, \\
\delta(\partial_\mu) &= -\varepsilon^\nu{}_\mu \partial_\nu.
\end{aligned}\right\} \tag{11.18}$$

---

*)　$\eta_{\mu\nu}$ を $\gamma_{\mu\nu}$ に置きかえると同時に，Lagrange 関数に $\sqrt{|\det(\gamma_{\mu\nu})|}$ をかけることを忘れてはならない．したがって，最初の L にこの因子をかけたものを今後 L とかく．

これからの議論はほとんど一般論と同じだが，一般論と少々異なりここでは座標が変換されるので，以下に推論の概略を述べる．

アフィン変換(11.16)に対して I が不変ということから，$\varepsilon^\rho{}_\sigma$ の係数として

$$\frac{\partial L}{\partial\varphi_A}(\boldsymbol{G}^\sigma{}_\rho\varphi)_A+\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\mu}}(\boldsymbol{G}^\sigma{}_\rho\varphi_{,\mu})_A-\frac{\partial L}{\partial\varphi_{A,\sigma}}\varphi_{A,\rho}$$
$$-2\frac{\partial L}{\partial\gamma_{\sigma\tau}}\gamma_{\rho\tau}+\partial^\sigma{}_\rho L\equiv 0 \tag{11.19}$$

という恒等式が導かれる*)．

ここで一般論の処法に従って $\varepsilon^\rho{}_\sigma$ を $\xi^\rho{}_\sigma(x)$ におきかえよう．しかし，ここで注意すべきことがある．(11.18)の dx^μ の変換則は，ε を $\xi(x)$ におきかえることにより次のように書きかえられる：

$$dx^\mu\rightarrow dx'^\mu\overset{d}{\equiv}dx^\mu+\xi^\mu{}_\nu(x)dx^\nu.$$

この dx^μ に対する変換則が積分されて

$$x^\mu\rightarrow x'^\mu=x^\mu+\xi^\mu(x) \tag{11.20}$$

という形にまとまるためには

$$\frac{\partial}{\partial x^\sigma}\xi^\mu{}_\rho(x)=\frac{\partial}{\partial x^\rho}\xi^\mu{}_\sigma(x),$$

あるいは

$$\xi^\mu{}_\rho(x)=\frac{\partial}{\partial x^\rho}\xi^\mu(x)\overset{d}{\equiv}\xi^\mu{}_{,\rho} \tag{11.21}$$

となることが必要である．

$\varepsilon^\rho{}_\sigma$ を $\xi^\rho{}_{,\sigma}(x)$ に置きかえる場合は，$\delta\varphi_{A,\mu}$ は

$$\delta\varphi_{A,\mu}\overset{d}{\equiv}\frac{\partial}{\partial x'^\mu}\varphi'_A(x')-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\varphi_A(x)$$
$$=-\xi^\nu{}_{,\mu}\varphi_{A,\nu}+\frac{\partial}{\partial x^\mu}\{\xi^\rho{}_{,\sigma}(\boldsymbol{G}^\sigma{}_\rho\varphi)_A\}. \tag{11.22}$$

そこで，この第2項に含まれる $\xi^\rho{}_{,\sigma\mu}$ を相殺するためにゲージ場 $A^\rho{}_{\sigma\mu}$ を導入することになる．

---

*) 前頁の脚注に述べたように，この L には $\sqrt{|\det(\gamma_{\mu\nu})|}$ が因数としてかけてあることを忘れてはならない．

いま無限小変換(11.20)に対して，この $A^{\rho}{}_{\sigma\mu}$ には

$$\delta A^{\rho}{}_{\mu\sigma} \stackrel{d}{\equiv} \xi^{\alpha}{}_{,\beta}({}^{\beta}{}_{\alpha}|N^{\rho}{}_{\mu\sigma})-\xi^{\rho}{}_{,\mu\sigma} \tag{11.23}$$

のような変分が引き起こされるとする．未定係数$({}^{\beta}{}_{\alpha}|N^{\rho}{}_{\mu\sigma})$を決定することが，われわれの課題である．

一般座標変換(11.20)を行なえば，計量テンソル $\gamma_{\mu\nu}$ は，もはや，定数の成分をもつテンソルではありえない．そこで，今後は $\gamma_{\mu\nu}$ の代わりに $g_{\mu\nu}(x)$ と書くことにする．この $g_{\mu\nu}$ は，$\det(g_{\mu\nu})\neq 0$ ならば，現段階では，x のどのような関数でもかまわない．

これですべての準備ができたから，新しい Lagrange 関数を

$$L'(\varphi_A, \varphi_{A,\mu}, g_{\mu\nu}(x), A^{\rho}{}_{\mu\sigma}) \tag{11.24}$$

とおく．この L' から作られる作用積分 I が，無限小の一般座標変換(11.20)に対して不変となるためには，L' はどんなものであればよいか，また $\delta A^{\rho}{}_{\mu\sigma}$ はどんな形かを調べてみよう．

まず

$$\begin{aligned}\delta I = \int\Big\{&\frac{\partial L'}{\partial\varphi_A}\delta\varphi_A+\frac{\partial L'}{\partial\varphi_{A,\mu}}\delta\varphi_{A,\mu}+\frac{\partial L'}{\partial g_{\mu\nu}}\delta g_{\mu\nu}\\ &+\frac{\partial L'}{\partial A^{\rho}{}_{\sigma\mu}}\delta A^{\rho}{}_{\sigma\mu}+\xi^{\rho}{}_{,\rho}L'\Big\}d^4x\equiv 0\end{aligned} \tag{11.25}$$

に(11.17)(ただし ε を ξ に置き換える)，(11.22)，(11.23)などを代入して，$\xi^{\lambda}{}_{,\mu\nu}$ に比例する項の和を 0 とおくと

$$\frac{\partial L'}{\partial\varphi_{A,\mu}}(\boldsymbol{G}^{\nu}{}_{\lambda}\cdot\varphi)_A+\frac{\partial L'}{\partial\varphi_{A,\nu}}(\boldsymbol{G}^{\mu}{}_{\lambda}\cdot\varphi)_A\equiv\frac{\partial L'}{\partial A^{\lambda}{}_{\mu\nu}}+\frac{\partial L'}{\partial A^{\lambda}{}_{\nu\mu}} \tag{11.26}$$

となる．

ここで φ_A の共変微分を，一般論に従って

$$\nabla_{\mu}\varphi_A \stackrel{d}{\equiv} \partial_{\mu}\varphi_A+A^{\lambda}{}_{\mu\nu}(\boldsymbol{G}^{\nu}{}_{\lambda}\cdot\varphi)_A \tag{11.27}$$

と定義する．

また $A^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ を

$$A^{\lambda}{}_{\mu\nu}=A^{\lambda}{}_{(\mu\nu)}+A^{\lambda}{}_{[\mu\nu]} \tag{11.28}$$

のように分解する．ここで

$$A^{\lambda}{}_{(\mu\nu)} \overset{d}{\equiv} \frac{1}{2}(A^{\lambda}{}_{\mu\nu}+A^{\lambda}{}_{\nu\mu})$$

$$A^{\lambda}{}_{[\mu\nu]} \overset{d}{\equiv} \frac{1}{2}(A^{\lambda}{}_{\mu\nu}-A^{\lambda}{}_{\nu\mu})$$

とする.

(11.28), (11.27)を用いてLagrange関数を

$$L' \overset{d}{\equiv} L''(\varphi_A, \nabla_\mu\varphi_A, g_{\mu\nu}, A^{\lambda}{}_{(\mu\nu)}, A^{\lambda}{}_{[\mu\nu]}) \tag{11.29}$$

と書きかえよう.

この結果, 次のような書きかえの関係式が導かれる:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial L'}{\partial\varphi_A}=\frac{\partial L''}{\partial\varphi_A}+\frac{\partial L''}{\partial(\nabla_\mu\varphi)_B}A^{\rho}{}_{\mu\sigma}(\boldsymbol{G}^{\sigma}{}_{\rho})_B{}^A,\\
&\frac{\partial L'}{\partial\varphi_{A,\sigma}}=\frac{\partial L''}{\partial(\nabla_\sigma\varphi)_A},\\
&\frac{\partial L'}{\partial A^{\lambda}{}_{\mu\nu}}=\frac{\partial L''}{\partial(\nabla_\mu\varphi)_A}(\boldsymbol{G}^{\nu}{}_{\lambda}\cdot\varphi)_A+\frac{\partial L''}{\partial A^{\lambda}{}_{(\mu\nu)}}+\frac{\partial L''}{\partial A^{\lambda}{}_{[\mu\nu]}}.
\end{aligned}\right\} \tag{11.30}$$

これを(11.26)に代入すると

$$\frac{\partial L''}{\partial A^{\lambda}{}_{(\mu\nu)}}\equiv 0 \tag{11.31}$$

となる. つまり I が不変となるためには, L'' は $A^{\lambda}{}_{(\mu\nu)}$ をあらわに含むことはできない. それは $\nabla_\mu\varphi_A$ の中に陰に含まれるにすぎないということである.

次に(11.25)の $\xi^{\rho}{}_{,\sigma}$ に比例する項を集め, さらに(11.30)という公式を使うと

$$\begin{aligned}
&\Big[\frac{\partial L''}{\partial\varphi_A}(\boldsymbol{G}^{\sigma}{}_{\rho}\cdot\varphi)_A-\frac{\partial L''}{\partial(\nabla_\sigma\varphi)_A}(\nabla_\rho\varphi)_A+\frac{\partial L''}{\partial(\nabla_\mu\varphi)_A}(\boldsymbol{G}^{\sigma}{}_{\rho}\cdot\nabla_\mu\varphi)_A\\
&\quad-2\frac{\partial L''}{\partial g_{\sigma\tau}}g_{\rho\tau}+\delta^{\sigma}{}_{\rho}L''\Big]+\frac{\partial L''}{\partial(\nabla_\mu\varphi)_A}\cdot A^{\lambda}{}_{\mu\nu}\big\{[\boldsymbol{G}^{\nu}{}_{\lambda},\boldsymbol{G}^{\sigma}{}_{\rho}]\varphi\big\}_A\\
&\quad+\frac{\partial L''}{\partial(\nabla_\sigma\varphi)_A}A^{\mu}{}_{\rho\nu}(\boldsymbol{G}^{\nu}{}_{\mu}\cdot\varphi)_A+\frac{\partial L''}{\partial(\nabla_\nu\varphi)_A}\cdot(\boldsymbol{G}^{\mu}{}_{\lambda}\cdot\varphi)_A\cdot({}^{\sigma}{}_{\rho}|N^{\lambda}{}_{\nu\mu})\\
&\quad+\frac{\partial L''}{\partial A^{\lambda}{}_{[\mu\nu]}}\cdot({}^{\sigma}{}_{\rho}|N^{\lambda}{}_{[\mu\nu]})\equiv 0.
\end{aligned} \tag{11.32}$$

(11.32)の左辺の先頭にある[ ]の中を恒等式(11.19)と比べれば容易にわかるように, もしLagrange関数 L' を

$$L'\equiv L(\varphi_A, \nabla_\mu\varphi_A, g_{\mu\nu}) \tag{11.33}$$

のように選べば, (11.32) の [　] の中は 0 となる．またそのときは，$A^{\lambda}{}_{[\mu\nu]}$ は L の中にあらわには出てこないから，(11.32) の左辺の最後の項も 0 となる．

ところで，$\boldsymbol{G}^{\nu}{}_{\lambda}$ の交換関係は，すでに(8.36)に与えられているように

$$[\boldsymbol{G}^{\nu}{}_{\lambda}, \boldsymbol{G}^{\sigma}{}_{\rho}] = \partial^{\nu}{}_{\rho}\boldsymbol{G}^{\sigma}{}_{\lambda} - \partial^{\sigma}{}_{\lambda}\boldsymbol{G}^{\nu}{}_{\rho} \tag{11.34}$$

である．

この関係を使うと，(11.32) から $({}^{\sigma}{}_{\rho}|N^{\lambda}{}_{\mu\nu})$ がきまる．その結果，A の変換則は

$$\delta A^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \xi^{\lambda}{}_{,\tau}A^{\tau}{}_{\mu\nu} - \xi^{\tau}{}_{,\mu}A^{\lambda}{}_{\tau\nu} - \xi^{\tau}{}_{,\nu}A^{\lambda}{}_{\mu\tau} - \xi^{\lambda}{}_{,\mu\nu} \tag{11.35}$$

となる．

なお A を(11.28)のように分解すると，(11.35)から

$$\delta A^{\lambda}{}_{(\mu\nu)} = \xi^{\lambda}{}_{,\tau}A^{\tau}{}_{(\mu\nu)} - \xi^{\tau}{}_{,\mu}A^{\lambda}{}_{(\tau\nu)} - \xi^{\tau}{}_{,\nu}A^{\lambda}{}_{(\tau\mu)} - \xi^{\lambda}{}_{,\mu\nu}, \tag{11.36a}$$

$$\delta A^{\lambda}{}_{[\mu\nu]} = \xi^{\lambda}{}_{,\tau}A^{\tau}{}_{[\mu\nu]} - \xi^{\tau}{}_{,\mu}A^{\lambda}{}_{[\tau\nu]} + \xi^{\tau}{}_{,\nu}A^{\lambda}{}_{[\tau\mu]} \tag{11.36b}$$

となる．

つまり $A^{\lambda}{}_{[\mu\nu]}$ は，その定義からもわかるように，$\xi^{\lambda}{}_{,\mu\nu}$ の相殺には役立たない．すなわち，それは余計なものであるから今後は $A^{\lambda}{}_{[\mu\nu]}$ をすべて 0 とおく．

ところで局所的変換に移行するとともに，$\gamma_{\mu\nu}$ を $g_{\mu\nu}(x)$ に置きかえたが，置きかえる前は，$\gamma_{\mu\nu}$ は x に無関係であったために，L の中にでてくる微分記号と $\gamma_{\mu\nu}$ の相対的位置については，どうでもよかった．

局所的変換を扱うことになり，∂_{μ} を ∇_{μ} に，$\gamma_{\mu\nu}$ を $g_{\mu\nu}(x)$ に置きかえる際に，$g_{\mu\nu}$ の位置に関して疑問が生じないようにするには，$\partial_{\lambda}\gamma_{\mu\nu}=0$ に対応して

$$\nabla_{\lambda}g_{\mu\nu} = 0 \tag{11.37}$$

とする必要がある．

一般論によれば，$g_{\mu\nu}$ の変換性

$$\delta g_{\mu\nu} = -\xi^{\rho}{}_{,\mu}g_{\rho\nu} - \xi^{\rho}{}_{,\nu}g_{\rho\mu}$$

から，

$$\nabla_{\lambda}g_{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \partial_{\lambda}g_{\mu\nu} - A^{\rho}{}_{(\lambda\mu)}g_{\rho\nu} - A^{\rho}{}_{(\lambda\nu)}g_{\rho\mu} \tag{11.38}$$

とおかねばならない．

そこで(11.38)を A について解けば，ここに導入されたゲージ場 $A^{\lambda}{}_{(\mu\nu)}$ は次のようになる：

$$A^\lambda{}_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}(g_{\rho\mu,\nu}+g_{\nu\rho,\mu}-g_{\mu\nu,\rho}) \overset{d}{\equiv} \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}. \tag{11.39}$$

それゆえ，今後は $A^\lambda{}_{(\mu\nu)}$ のかわりに $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ と書くことにする.

いま

$$\boldsymbol{\Gamma}_\mu \overset{d}{\equiv} \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}\boldsymbol{G}^\nu{}_\lambda \tag{11.40}$$

とおけば(11.27)は次のようになる:

$$(\nabla_\mu\varphi)_A = \{(\partial_\mu+\boldsymbol{\Gamma}_\mu)\varphi\}_A. \tag{11.41}$$

そこで曲率は，行列形式を用いると(10.32)から

$$\boldsymbol{F}_{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} \partial_\mu\boldsymbol{\Gamma}_\nu-\partial_\nu\boldsymbol{\Gamma}_\mu+[\boldsymbol{\Gamma}_\mu, \boldsymbol{\Gamma}_\nu] \overset{d}{\equiv} F^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\cdot\boldsymbol{G}^\beta{}_\alpha, \tag{11.42}$$

$$F^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu\Gamma^\alpha{}_{\nu\beta}-\partial_\nu\Gamma^\alpha{}_{\mu\beta}+\Gamma^\alpha{}_{\mu\tau}\Gamma^\tau{}_{\nu\beta}-\Gamma^\alpha{}_{\nu\tau}\Gamma^\tau{}_{\mu\beta} = R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} \tag{11.43}$$

となる．この右辺の $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ は相対論にでてきた Riemann-Christoffel の曲率テンソルにほかならない．そこで本節では $\boldsymbol{F}_{\mu\nu}$ の代わりに $\boldsymbol{R}_{\mu\nu}$ とかく．

ここで(11.41)の変換性について一言つけ加えるべきことがある．いま簡単のために φ_A として，反変ベクトル場 φ^μ を考えよう．その変換則を

$$\varphi^\mu(x) \to \varphi'^\mu(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\varphi^\nu(x) \overset{d}{\equiv} (\boldsymbol{T})^\mu{}_\nu\cdot\varphi^\nu$$

とかくことにする．これに対する $\boldsymbol{G}^\rho{}_\sigma$ は，すでに第9章の p. 105 に与えてあるように

$$(\boldsymbol{G}^\sigma{}_\rho)^\mu{}_\nu \overset{d}{\equiv} \left.\frac{\partial\{\boldsymbol{T}(\xi)\}^\mu{}_\nu}{\partial\xi^\rho{}_{,\sigma}}\right|_{\xi=0} = \delta^\mu{}_\rho\cdot\delta^\sigma{}_\nu.$$

またこのときは，$\boldsymbol{\Gamma}_\lambda$ は

$$(\boldsymbol{\Gamma}_\lambda)^\mu{}_\nu \overset{d}{\equiv} (\Gamma^\rho{}_{\lambda\sigma}\boldsymbol{G}^\sigma{}_\rho)^\mu{}_\nu = \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} \tag{9.4}$$

となる．この $\boldsymbol{\Gamma}_\lambda$ の変換則は，すでに(2.16)′ に与えられている．

これを用いると $(\nabla_\mu\varphi)^\lambda$ の変換則は第9章で述べた通り

$$(\nabla_\mu\varphi)^\lambda \to (\nabla'_\mu\varphi')^\lambda = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}(\boldsymbol{T})^\lambda{}_\omega\cdot(\nabla_\nu\varphi)^\omega \tag{9.6}$$

となる．一般論の(10.19)とは異なり，$\nabla_\mu\varphi^\lambda$ の変換則には，φ^λ 自身のそれに比べて，余計な変換係数 $\partial x^\nu/\partial x'^\mu$ が必要である．この事情は $\boldsymbol{\Gamma}_\lambda$ の変換則(2.16)′ の場合と同様である(p. 119 の脚注参照).

ゲージ場の一般論では(10.19)に示されたように，$\nabla_\mu\varphi$ の変換則は φ のそれ

とまったく同一である．つまり ∇_μ という演算は，φ の変換則に何らの変更も引き起こさない．それゆえ，ゲージ場の一般論にでてきた演算 ∇_μ は，むしろ **“不変微分”** とよぶべきである．これに反して，座標変換群の場合，∇_μ を“共変微分”とよぶ理由は，上に述べた係数 $\partial x^\nu/\partial x'^\mu$ が示すように，∇_μ が x-変換に対して，共変ベクトルの変換性をもつからである．つまりゲージ場の中で，唯一の例外である重力場のときにかぎり共変微分とよぶことが必要になる．しかし現在は，“共変微分”というよび名が使われているのでこれに従う*).

なお同じ理由から曲率 $\boldsymbol{R}_{\mu\nu}$ ($\overset{d}{\equiv} R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}\boldsymbol{G}^\beta{}_\alpha$) の変換則は

$$\boldsymbol{R}'_{\mu\nu}=\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\boldsymbol{T}\boldsymbol{R}_{\rho\sigma}\boldsymbol{T}^{-1}$$

となる．これも一般ゲージ場の変換則(10.33)と異なる．それゆえ $\boldsymbol{R}_{\mu\nu}$ の共変微分は

$$\nabla_\lambda\boldsymbol{R}_{\mu\nu}=\partial_\lambda\boldsymbol{R}_{\mu\nu}+[\boldsymbol{\Gamma}_\lambda,\boldsymbol{R}_{\mu\nu}]-\Gamma^\tau{}_{\lambda\mu}\boldsymbol{R}_{\tau\nu}-\Gamma^\tau{}_{\lambda\nu}\boldsymbol{R}_{\mu\tau}$$

となる．右端の2個の項は座標変換群の場合にのみでてくる．

重力場の方程式は，ゲージ場の一般論の立場から見るとむしろ以下のようにすべきであろう．

まず重力場を表わすものは $g_{\mu\nu}$ ではなくて，$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ である．その Lagrange 関数は，c を適当な規格化定数とするとき

$$L_1=c\,\mathrm{Tr}(\boldsymbol{R}_{\mu\nu}\cdot\boldsymbol{R}_{\rho\sigma})g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\sqrt{-g},$$

あるいは

$$L_1=cR^\alpha{}_{\beta\mu\nu}R^\beta{}_{\alpha\rho\sigma}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}\sqrt{-g}.$$

なお $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ と $g_{\mu\nu}$ は一応，互いに独立な場の量とみなす．両者の間に存在する(11.39)という関係を導くためには，さらに

$$L_2=\Lambda^{(\mu\nu)}{}_\lambda\left\{\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g^{\lambda\tau}(g_{\tau\mu,\nu}+g_{\nu\tau,\mu}-g_{\mu\nu,\tau})\right\}$$

という Lagrange 関数を L_1 に追加すればよい．右辺の先頭にある $\Lambda^{(\mu\nu)}{}_\lambda(x)$ は Lagrange の未定乗数とよばれる補助変数で，これは3階のテンソル密度である．すなわち変換 $x^\mu\to x'^\mu$ に対して

---

*) 実は著者も1956年の Phys. Rev. の論文で，いろいろと考えたあげく共変微分というよび名を，“…”という印をつけて使用した．

$$\Lambda'^{(\mu\nu)}{}_{\lambda}(x')=\frac{\partial(x^0\cdots x^3)}{\partial(x'^0\cdots x'^3)}\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\lambda}\Lambda^{(\alpha\beta)}{}_{\tau}(x)$$

という変換則に従うものである．

$$L_{\mathrm{G}}\overset{d}{\equiv}L_1+L_2$$

から作られる作用積分 I は一般座標変換に対してもちろん，不変である．

$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ および $\Lambda^{(\mu\nu)}{}_\lambda$ に関して I の変分を求めることにより，重力場の方程式が導かれる．$\Lambda^{(\mu\nu)}{}_\lambda$ の変分からは，関係式(11.39)が，g に関する場の方程式として導かれる．そこで(11.39)を使って Γ を g で表わし，さらに $\Lambda^{(\mu\nu)}{}_\lambda$ も消去すれば，$g_{\mu\nu}$ に関する 4 階微分方程式が求められる．これが，重力場の方程式である．これは Einstein の方程式や，Newton の方程式と著しく異なっている．この場合についても若干の研究はされているが，これ以上，この話に立ち入ることはやめにしよう[11]．

11.4　重力場(その 2)

重力場を導くのに，ここでは局所 Lorentz 系を用いる方法を説明する[12)13)]．

まず重力場が存在しない場合を考えよう．そのような空間では時空全体をおおうひとつの Lorentz 座標系を設けることができる．この座標軸を基準としたとき，世界点の座標を X^k $(k=0,1,2,3)$，また一般に任意のベクトル V の成分は V^k といった具合に，小文字のラテン字で成分を表わすことにする．

いま X-系とは別に，時空内に任意の曲線座標系を設け，それを用いた場合の世界点の座標を x^μ とする．つまり任意の点 P には X^k，および x^μ という二通りの座標が与えられているとする．曲線系に関する添字はすべてギリシャ字を用いることにする．

X^k は x^μ の関数と考えられるから

$$h^k{}_\mu(x)\overset{d}{\equiv}\frac{\partial X^k(x)}{\partial x^\mu},\qquad h^\mu{}_k\overset{d}{\equiv}\frac{\partial x^\mu}{\partial X^k}\tag{11.44}$$

とおけば，

$$\frac{\partial h^k{}_\mu}{\partial x^\nu}=\frac{\partial h^k{}_\nu}{\partial x^\mu}\tag{11.45}$$

が成立する．$h^k{}_\mu$ と $h^\mu{}_k$ を 4 次の正方行列の要素とみなせば，これらは互いに

他の逆行列であることが，(11.44)から明らかであろう．

隣接する2個の世界点の間の不変距離 ds は

$$ds^2 = \eta_{kl}dX^k dX^l = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu$$

となる．ここで $g_{\mu\nu}$ は

$$g_{\mu\nu}(x) \overset{d}{\equiv} \eta_{kl}h^k{}_\mu(x)h^l{}_\nu(x) \tag{11.46}$$

である．これは

$$h^\mu{}_k h^\nu{}_l g_{\mu\nu} = \eta_{kl} \tag{11.46$'$}$$

と書きかえることもできる．$g^{\mu\nu}(x)$ の定義も容易に想像できるであろう．

(11.46), (11.46)′ を使うと，例えば

$$g_{\mu\nu}h^\nu{}_l\eta^{lk} = h^k{}_\mu$$

という関係が求まる．一般に，ラテン字およびギリシャ字の添字の上げ下ろしには，それぞれ η^{kl}, η_{kl}, および $g^{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ をかければよいことがわかる．

また曲線座標系の成分(ギリシャ添字)をLorentz系の成分(ラテン添字)に，あるいはその逆の転換をするには $h^k{}_\mu$ や $h^\mu{}_k$ を用いればよいことも容易にわかるであろう．例えば

$$V^k h^\mu{}_k \overset{d}{\equiv} V^\mu, \qquad h^k{}_\mu\frac{\partial}{\partial X^k}V^l(X) \overset{d}{\equiv} \frac{\partial}{\partial x^\mu}V^l\{X(x)\}. \tag{11.47}$$

Lorentz変換

$$X^k \to X'^k = a^k{}_l X^l \tag{11.48}$$

に対し，h は

$$h'^k{}_\mu(x) = a^k{}_l h^l{}_\mu(x), \qquad h'^\mu{}_k(x) = h^\mu{}_l(x)(a^{-1})^l{}_k \tag{11.49}$$

のように変換される．しかし $g_{\mu\nu}$ はこれに対して不変，また(11.46)′ は X'-系でも同じ形で成立する．

次に x-系の一般座標変換

$$x^\mu \to x'^\mu = f^\mu(x) \tag{11.50}$$

に対しては，h は

$$h'^k{}_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}h^k{}_\nu(x), \qquad h'^\mu{}_k(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}h^\nu{}_k(x) \tag{11.51}$$

という変換をうける．

さて，φ_A は，X-系を基準にとった場合のあるテンソル(場合によってはスピ

ノールでもよい)量とし，それは X-系 の Lorentz 変換(11. 48)に応じて

$$\psi'_A = \boldsymbol{T}(a)_A{}^B \cdot \psi_B \qquad (A=1, \cdots, N) \tag{11.52}$$

のように変換されるとする.

特に無限小 Lorentz 変換のときは，パラメーター $a^k{}_l$ を

$$a^k{}_l = \delta^k{}_l + \epsilon^k{}_l, \qquad \epsilon^{kl} = \epsilon^k{}_j \eta^{jl} = -\epsilon^{lk} \tag{11.52$'$}$$

とかくと,

$$\delta\psi_A = \frac{1}{2}\epsilon^{kl}(\boldsymbol{G}_{kl}\cdot\psi)_A \tag{11.53}$$

となる. ここで $\boldsymbol{G}_{kl}(=-\boldsymbol{G}_{lk})$ は Lorentz 群の 6 個の生成元を表わす N 次の表現行列である.

さて ψ_A 場の作用積分 I を

$$I = \int L(\psi_A, \partial\psi_A/\partial X^k)d^4X \tag{11.54}$$

とする. これは Lorentz 不変と仮定する.

ここで ψ_A に含まれる X を $X^k(x)$ とみなすことにより，ψ_A を x の関数 $\psi_A(x)$ と書く. 微分 $\partial/\partial X^k$ は(11. 47)に従って $\partial/\partial x^\mu$ に書きかえる. 最後に

$$\begin{aligned} d^4X &= \det(h^k{}_\mu(x))d^4x \\ &= \sqrt{|\det g_{\mu\nu}(x)|}\,d^4x \end{aligned}$$

とおけば，上にでてきた I は次のようになる:

$$\left.\begin{aligned} I &= \int L'(\psi_A(x), \partial\psi_A/\partial x^\mu, h^k{}_\mu)d^4x, \\ L' &\overset{d}{\equiv} L\cdot\frac{\partial(X^0\cdots X^3)}{\partial(x^0\cdots x^3)} = L\cdot\det(h^k{}_\mu). \end{aligned}\right\} \tag{11.54$'$}$$

(11. 54)′ には，X 自身は顔を出さないから，今後 Lorentz 変換というときは，(11. 49) だけを意味し，(11. 48) は考えないことにする.

曲線座標 x^μ の任意の変換(11. 50) に対して (11. 54)′ が不変であることは，そのもともとの定義から自明である. また $\psi_A(x)$ が，(11. 50) に対してスカラー量，つまり

$$\psi_A(x) = \psi_A\{f^{-1}(x')\} \overset{d}{\equiv} \psi'_A(x')$$

であることも，いうまでもない. ここで $f^{-1}(x')$ は x のことである.

これから，一般論の処方に従って Lorentz 変換のパラメーター ϵ^{kl} を $\xi^{kl}(x)$ $(=-\xi^{lk}(x))$ に置きかえよう．この置きかえ後も，物理系が局所的 Lorentz 変換に対して不変であるためには，$\partial_\mu\psi_A$ を

$$\nabla_\mu\psi_A(x) \stackrel{d}{\equiv} \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}+\frac{1}{2}A^{kl}{}_\mu\cdot\boldsymbol{G}_{kl}\right)\psi\right\}_A \tag{11.55}$$

に置きかえねばならない．ここで $A^{kl}{}_\mu(x)(=-A^{lk}{}_\mu)$ はゲージ場である．これと重力場との関係については後に説明する．

ところで，変換 (11.49) を局所的変換に置きかえることに伴い，(11.45) は不成立となる．そこで，(11.44) を満足するような $X^k(x)$ という座標系を時空全域にわたって設置できるという前提も，これからは放棄しなければならない．換言すれば，今後は，時空が平坦か，否かを問わず，いずれの場合でも，以後の議論が適用できることになる．なお本物の重力の存否を知りたければ，後にでてくる曲率を調べればよい．

そこでこれからは $h^k{}_\mu\,(k=0,\cdots,3)$ は，x-系を基準にした場合，4 個の共変ベクトル場とみなす．これを局所 Lorentz 系の局所的座標軸とよぶことにする．それは英，独語では，それぞれ Tetrad，ならびに Vierbein とよばれる．

さて，X^k-系の存在を前提から除外した現在は，時空点の座標は x^μ で表わす．また距離は

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{11.56}$$

としなければならない．この $g_{\mu\nu}$ は(11.46)で与えられるものである．なお $h^\mu{}_k(x)$ を $h^k{}_\mu(x)$ の逆行列として定義すれば，(11.44), (11.45) という定義や関係式がなくても，いままでに述べたことはすべて成立する．

そこで ψ_A 系の作用積分 I は，(11.54)′ の中の $\partial_\mu\psi_A$ を単に $\nabla_\mu\psi_A$ におきかえればよい：

$$I' = \int L'(\psi_A, \nabla_\mu\psi_A, h^k{}_\mu(x))d^4x. \tag{11.54$''$}$$

さて，(11.55) が，x-変換に対して，添字 μ の示すような共変ベクトルとして変換されるためには，A は

$$A'^{kl}{}_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}A^{kl}{}_\nu(x) \tag{11.57}$$

のように変換されねばならない．

一方局所的 Lorentz 変換に対しては，一般論に従い，$A^{kl}{}_{\mu}$ は次のように変換される．いま

$$\boldsymbol{A}_{\mu}(x) \overset{d}{\equiv} \frac{1}{2}A^{kl}{}_{\mu}(x)\cdot\boldsymbol{G}_{kl} \tag{11.58}$$

とおけば，$\boldsymbol{A}_{\mu}(x)$ は次のものに変わる：

$$\boldsymbol{A}'_{\mu}(x) \overset{d}{\equiv} \frac{1}{2}A'^{kl}{}_{\mu}(x)\boldsymbol{G}_{kl} \overset{d}{\equiv} \boldsymbol{T}\boldsymbol{A}_{\mu}\boldsymbol{T}^{-1}-\partial_{\mu}\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}. \tag{11.59}$$

ここで N 次の正方行列 $\boldsymbol{T}$ は，(11.52) のパラメーター $a^{k}{}_{l}$ を $a^{k}{}_{l}(x)$ に置きかえたものである．

$A^{kl}{}_{\mu}$ の変換則を具体的に求めるため，特に ψ_{A} としてベクトル V^{i} を例にとれば，$(\boldsymbol{T}\cdot\psi)_{A}$ は

$$\{\boldsymbol{T}(a)\}^{i}{}_{j}V^{j} = a^{i}{}_{j}V^{j},$$

すなわち

$$\{\boldsymbol{T}(a)\}^{i}{}_{j} \overset{d}{\equiv} a^{i}{}_{j}(x) \tag{11.60}$$

となる．

さらに無限小変換 $a^{i}{}_{j}(x)=\delta^{i}{}_{j}+\xi^{i}{}_{j}(x)$ を

$$\boldsymbol{T}(a)^{i}{}_{j} = \left\{\boldsymbol{1}+\frac{1}{2}\xi^{kl}(x)\boldsymbol{G}_{kl}\right\}^{i}{}_{j}$$

と書くことにより

$$(\boldsymbol{G}_{kl})^{i}{}_{j} = \delta^{i}{}_{k}\eta_{lj}-\delta^{i}{}_{l}\eta_{kj}$$

が導かれる．

そこで(11.58)は

$$\{\boldsymbol{A}_{\mu}(x)\}^{i}{}_{j} = A^{i}{}_{j\mu}(x) \tag{11.58$'$}$$

となる．

(11.60), (11.58)$'$ を (11.59) に代入すれば，

$$A'^{k}{}_{l\mu}(x) = a^{k}{}_{i}A^{i}{}_{j\mu}(a^{-1})^{j}{}_{l}-\partial_{\mu}a^{k}{}_{i}(x)\cdot(a^{-1})^{i}{}_{l} \tag{11.59$'$}$$

が導かれる．

ここで特に無限小変換 $a^{k}{}_{l}=\delta^{k}{}_{l}+\xi^{k}{}_{l}(x)$ のときは

$$\delta A^{k}{}_{l\mu} = \xi^{k}{}_{i}A^{i}{}_{l\mu}+\xi_{l}{}^{j}A^{k}{}_{j\mu}-\partial_{\mu}\xi^{k}{}_{l}. \tag{11.61}$$

ここに導入された $A^{kl}{}_\mu$ と前節 **11.3** に導入された $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ の間の関係を調べるため，ψ_A として再び Lorentz ベクトル $V_k(x)$ を例にとって考えてみよう．

まず局所 Lorentz 系から見た場合，V_k の共変微分は，Lorentz 変換に対する V_k の変換性と，一般公式(11.55)から

$$\nabla_\mu V_k \overset{d}{\equiv} \partial_\mu V_k + A_k{}^l{}_\mu V_l \tag{11.62}$$

である．

これを x-系から眺めた場合の形式に書きかえるには，すでに述べたように $h^k{}_\nu$ をかければよい．すなわち

$$h^k{}_\nu \nabla_\mu V_k = \partial_\mu V_\nu - \partial_\mu h^k{}_\nu V_k + h^k{}_\nu A_k{}^l{}_\mu V_l$$

となる．

この右辺をまとめて

$$h^k{}_\nu \nabla_\mu V_k = \partial_\mu V_\nu - S^\lambda{}_{\mu\nu} V_\lambda \tag{11.63}$$

と書くことにしよう．ここで S は

$$S^\lambda{}_{\mu\nu} \overset{d}{\equiv} h^\lambda{}_k \partial_\mu h^k{}_\nu - A^{kl}{}_\mu h_{k\nu} h^\lambda{}_l \tag{11.64}$$

である．

(11.63)の左辺は一般座標変換(11.50)に対して2階の共変テンソルである．したがってこの右辺は V_ν の共変微分とみなすことができる．そのときは，$S^\lambda{}_{\mu\nu}$ は接続係数の役目をはたす．事実，(11.64)の右辺が一般座標変換(x-変換)に対して，前節 **11.3** にでてきた $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ とまったく同じふるまいをすることは容易にたしかめられる．それゆえ，(11.63)の右辺を V_ν の共変微分とみなすことは正当である．

このようにして

$$\nabla_\mu V_\nu \overset{d}{\equiv} \partial_\mu V_\nu - S^\lambda{}_{\mu\nu} V_\lambda \tag{11.63$'$}$$

という定義に到達する．

(11.64)は次のように書きかえることもできる：

$$\partial_\mu h^k{}_\nu + A^k{}_{l\mu} h^l{}_\nu - S^\lambda{}_{\mu\nu} h^k{}_\lambda = 0. \tag{11.65}$$

これは $\partial_\mu h^k{}_\nu$ を2種の接続係数(あるいはゲージ場) A と S を用いて書き表わした数式である．4×16個の独立成分をもつ $\partial_\mu h^k{}_\nu$ を表わすには，4×6個の $A^{kl}{}_\mu$ のほかに更に，S が4×10個の独立成分をもてば十分である．そこで，これからは

$$S^{\lambda}{}_{\mu\nu} = S^{\lambda}{}_{\nu\mu} \tag{11.66}$$

とする．

ここで $\partial_\lambda g_{\mu\nu}$ を計算しよう．(11.46)と(11.65)を使うと，$A_{kl\lambda}=-A_{lk\lambda}$ のために

$$\partial_\lambda g_{\mu\nu} = S^{\rho}{}_{\lambda\mu} g_{\rho\nu} + S^{\rho}{}_{\lambda\nu} g_{\rho\mu}$$

となる．この関係式と(11.66)から，ここに導入されたゲージ場 $S^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ は(11.39)の $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ とまったく同一のものであることがわかる．それゆえ，今後は S の代わりに $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$ という文字を使うことにする．

ここで，共変微分の定義を拡張し，一般座標変換(11.50)ならびに，局所的 Lorentz 変換のいずれに対しても適用できるよう，以下のような定義を採用しよう．

いま例として，$W^{k\mu}{}_{l\nu}(x)$ を考えよう．これは x-変換に対しては

$$W^{k\mu}{}_{l\nu}(x) \to W'^{k\mu}{}_{l\nu}(x') \overset{d}{\equiv} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} W^{k\rho}{}_{l\sigma}(x),$$

また局所的 Lorentz 変換に対しては

$$W^{k\mu}{}_{l\nu}(x) \to W'^{k\mu}{}_{l\nu}(x) \overset{d}{\equiv} a^{k}{}_{i}(x) W^{i\mu}{}_{j\nu}(x) a^{-1}(x)^{j}{}_{l}$$

という変換をするテンソル場である．このように2種類のテンソルの性格をもつ場を混合テンソル場とよぶことにする．

さて，W の共変微分を

$$\nabla_\lambda W^{k\mu}{}_{l\nu} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda}} W^{k\mu}{}_{l\nu} + A^{k}{}_{i\lambda} W^{i\mu}{}_{l\nu} + \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\tau} W^{k\tau}{}_{l\nu}$$
$$+ A_{l}{}^{i}{}_{\lambda} W^{k\mu}{}_{i\nu} - \Gamma^{\tau}{}_{\lambda\nu} W^{k\mu}{}_{l\tau} \tag{11.67}$$

のように定義する．

もし W が $W^{k}{}_{l}$ ならば，この定義は(11.55)と一致する．また $W^{\mu}{}_{\nu}$ ならば，(11.67)は前節 **11.3** に述べた定義，すなわち一般相対論で用いられている周知の定義とまったく同じものである．テンソルの階数や種類がいかなるものであろうとも，(11.67)を基にして，その共変微分をどのように定義すればよいか，容易に想像できるであろう．なお(11.67)から，ここに与えた共変微分の定義が

$$\nabla_\lambda(A\cdot B) = \nabla_\lambda A\cdot B + A\cdot\nabla_\lambda B$$

という分配則を満足することもすぐにわかるであろう．

(11.67)のような定義を使うと，(11.65)の左辺は$\nabla_\mu h^k{}_\nu$にほかならない．つまり(11.65)は

$$\nabla_\mu h^k{}_\nu = 0 \tag{11.65$'$}$$

と書くことができる．これは(11.63),(11.63)$'$と∇_μが分配則に従うことを思えば当然の結論である．

ここで(11.65)を

$$\partial_\mu h^k{}_\lambda = \Gamma^\rho{}_{\mu\lambda} h^k{}_\rho - A^k{}_{l\mu} h^l{}_\lambda \tag{11.65$''$}$$

と書こう．

いま時空内で，有限の拡がりをもつある領域Ωの内部にわたって，3種の場$h^k{}_\lambda, \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$および$A^{kl}{}_\mu$が与えられているとする．これらは独立ではなく，$\Omega$内のいたる所で(11.65)$''$という関係で結ばれているはずである．$h^k{}_\lambda$は適当な階数まで微分可能だから$\Omega$の内部では

$$\partial_\mu \partial_\nu h^k{}_\lambda = \partial_\nu \partial_\mu h^k{}_\lambda$$

が成立しなければならない．

そこでこれに(11.65)$''$の右辺を代入すると

$$h^k{}_\sigma R^\sigma{}_{\tau\mu\nu} = F^k{}_{l\mu\nu} h^l{}_\tau \tag{11.68}$$

となる．

ここで$F^k{}_{l\mu\nu}$は$A^{kl}{}_\mu$から作られる曲率テンソルで

$$\begin{aligned} F^k{}_{l\mu\nu} &\overset{d}{=} \partial_\mu A^k{}_{l\nu} - \partial_\nu A^k{}_{l\mu} + A^k{}_{m\mu} A^m{}_{l\nu} - A^k{}_{m\nu} A^m{}_{l\mu} \\ &= -F^k{}_{l\nu\mu}. \end{aligned} \tag{11.69}$$

また$R^\sigma{}_{\tau\mu\nu}$は$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$から導かれる曲率で，その定義は(11.43)に与えられている．

(11.68)が示すように，重力場$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$の真贋は，ゲージ場$A^{kl}{}_\mu$のそれと運命をともにしている．真の重力場が存在するときは，A場も本物であるから，局所Lorentz系をどんなに上手に選んでも，広い領域Ωのいたるところで$A^{kl}{}_\mu$を一挙に消し去ることはできない．

最後に，局所Lorentz系やゲージ場$A^{kl}{}_\mu$を考えたことの利点をひとつ述べよう．すでに述べたようにベクトルやテンソルの共変微分を求めるには，局所Lorentz系を基準にとって，それらの成分を書き表わしてもよいし，あるいは$h^k{}_\mu$をかけることによりx-系から見た成分で表現しようが，どちらでも可能で

ある．したがって，それらについては，あえて $A^{kl}{}_{\mu}$ 場を用いなくとも差支えない．

これに対してスピノール場は，一般座標系を用いて表現するわけにはいかない．そこで局所 Lorentz 系を用いてこれを表現せざるをえないから，$A^{kl}{}_{\mu}$ の導入は不可避となる．この例として電子に対する Dirac の波動方程式を考えよう．

まず重力を考えないときは Lorentz 系を用いて

$$\left\{\left(\gamma^k\frac{\partial}{\partial X^k}+m\right)\psi(X)\right\}^{\alpha}=0, \qquad (\alpha=1,\cdots,4). \tag{11.70}$$

$\psi^{\alpha}(X)\,(\alpha=1,\cdots,4)$ は Dirac のスピノール場，また 4 個の 4 次の正方行列 γ^k $(k=0,\cdots,3)$ は

$$[\gamma^k,\gamma^l]_+ \overset{d}{\equiv} \gamma^k\gamma^l+\gamma^l\gamma^k = 2\eta^{kl} \tag{11.71}$$

という関係を満足する．なおこの表現は

$$\left.\begin{aligned}(\gamma^k)^{\dagger} &= \gamma^k, \qquad (k=1,2,3),\\ (\gamma^0)^{\dagger} &= -\gamma^0\end{aligned}\right\} \tag{11.72}$$

とする．右肩の † はエルミット共役の行列を示す．

Lorentz 変換

$$X^k \to X'^k = a^k{}_l X^l$$

に対して $\psi^{\alpha}(X)$ は

$$\psi'^{\alpha}(X') \overset{d}{\equiv} \{\boldsymbol{T}(a)\}^{\alpha}{}_{\beta}\psi^{\beta}(X) \tag{11.73}$$

に変わるとする．

これに対して方程式(11.70)が形を変えない，つまり

$$\left\{\left(\gamma^k\frac{\partial}{\partial X'^k}+m\right)\psi'(X')\right\}^{\alpha}=0 \tag{11.70$'$}$$

であるためには

$$\boldsymbol{T}\gamma^k\boldsymbol{T}^{-1} = (a^{-1})^k{}_l\gamma^l \tag{11.74}$$

という関係が成立しなければならない．

これを無限小変換の場合に適用すると，$a^k{}_l=\delta^k{}_l+\epsilon^k{}_l$ に対して

$$\boldsymbol{T} = 1+\frac{1}{4}\epsilon^{kl}(\gamma_k\gamma_l) \tag{11.75}$$

となる．つまり(11.53)の G_{kl} は $\gamma_k\gamma_l/2$ である．

Lorentz 変換に対し ψ^α と反傾に変換される量を $\bar{\psi}_\alpha$ と書けば，それは

$$\bar{\psi}_\alpha(X) \overset{d}{\equiv} i\psi^\dagger{}_\beta\cdot(\gamma^0)^\beta{}_\alpha \tag{11.76}$$

である．ψ^β の複素共役 $(\psi^\beta)^*$ と $\psi^\dagger{}_\beta$ の間の関係は

$$\psi^\dagger{}_\beta \overset{d}{\equiv} (\psi^\beta)^*$$

である．$\psi^\dagger$ の添字が下についていることは，$\psi^\dagger$ が横1行の行列であることを表わしたいからである．

ψ^α が(11.73)のように変換されれば，$\bar{\psi}_\alpha$ は

$$\bar{\psi}'_\alpha \overset{d}{\equiv} i(\psi'^\dagger\cdot\gamma^0)_\alpha = \bar{\psi}_\beta\cdot(\boldsymbol{T}^{-1})^\beta{}_\alpha \tag{11.77}$$

となる．$\boldsymbol{T}$ が無限小変換(11.75)の場合には，(11.71)，(11.72)を用いて，(11.77)の成りたつことを容易に確めることができる．

いま

$$j^k \overset{d}{\equiv} i\bar{\psi}\gamma^k\psi \tag{11.78}$$

を電子の流れのベクトルとする．これは Lorentz 変換により

$$j'^k \overset{d}{\equiv} i\bar{\psi}'\gamma^k\psi' = i\bar{\psi}\boldsymbol{T}^{-1}\gamma^k\boldsymbol{T}\psi$$

となる．

これに(11.74)を使うと

$$j'^k = a^k{}_l j^l \tag{11.79}$$

となる．つまり j^k は Lorentz ベクトルである．

これから時空内には重力場が存在すると考えよう．そこで局所 Lorentz 系 $h^k{}_\mu(x)$ を各点に設ける．さらにこれらは局所的 Lorentz 変換をうけるとする．

このような変更に応じて Dirac の方程式は，一般座標系 x を基準とした次のものに書きかえられる．

$$\left\{\gamma^\mu(x)\nabla_\mu + m\right\}^\alpha{}_\beta\cdot\psi^\beta(x) = 0. \tag{11.80}$$

ここで次のような記号を用いた．

$$\gamma^\mu(x) \overset{d}{\equiv} \gamma^k h^\mu{}_k(x), \qquad \nabla_\mu\psi \overset{d}{\equiv} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{1}{4}A^{kl}{}_\mu\gamma_k\gamma_l\right)\psi. \tag{11.81}$$

γ^k は(11.71)にでてきた行列で，x には無関係だが，γ^μ は x の関数である．

$\psi(x)$ は x-変換に対しては不変，つまりスカラーである．しかし局所 Lorentz 変換に対しては(11.73)というスピノール型の変換をうける．ここで a は $a^k{}_l(x)$

である.

$\bar{\psi}$は重力のないときは,

$$\frac{\partial}{\partial X^k}\bar{\psi}\gamma^k - m\bar{\psi} = 0 \tag{11.70$'$}$$

という方程式を満足する. 重力場が存在する場合には

$$\nabla_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu - m\bar{\psi} = 0 \tag{11.80$'$}$$

となる. ここで $\nabla_\mu\bar{\psi}$ は, $\bar{\psi}$ が, ψ に反傾な変換をうけるということから

$$\nabla_\mu\bar{\psi} \overset{d}{\equiv} \frac{\partial}{\partial x^\mu}\bar{\psi} - \frac{1}{4}A^{kl}{}_\mu\cdot\bar{\psi}\gamma_k\gamma_l \tag{11.81$'$}$$

という形となる.

(11.80)と, $\bar{\psi}$ の定義を用いれば(11.80)$'$ を導くことは容易である.

さて(11.80)に左から $\bar{\psi}$ を, また(11.80)$'$ に右から ψ をかけて両者の和をとると

$$\partial_\mu\{\bar{\psi}\gamma^\mu(x)\psi\} - \bar{\psi}\gamma^k\psi\partial_\mu h^\mu{}_k(x)$$
$$+\frac{1}{4}A^{kl}{}_\mu\bar{\psi}[\gamma^\mu(x), \gamma_k\gamma_l]\psi = 0.$$

いま

$$j^\mu \overset{d}{\equiv} i\bar{\psi}\gamma^\mu(x)\psi = h^\mu{}_l(x)j^l$$

と書くことにすれば, 上の式は γ_k の交換関係を用いて次のようになる:

$$\partial_\mu j^\mu - j^k\{\partial_\mu h^\mu{}_k + A_k{}^l{}_\mu h^\mu{}_l\} = 0.$$

これに(11.65)$'$ を代入すれば

$$\nabla_\mu j^\mu \overset{d}{\equiv} \partial_\mu j^\mu + \Gamma^\mu{}_{\mu\nu}j^\nu = 0.$$

これは(本物か否かはともかくとして)重力場 Γ が存在する場合の電子流の連続の方程式にほかならない.

ところで, 著者がいままで述べてきたゲージ場の一般論を発表した頃と偶然にもほぼ同じ頃, ファイバー束論という新しい数学が誕生した. その当時は, 著者は言うに及ばず, おそらく物理学者のなかで, この新しい数学がのちに担うことになった重要な役割を予見していた者は一人もいなかったと想像する. ところが, この新数学の基礎となっている諸概念の主要なものが, ゲージ場の理論の基礎的概念と, 名前こそ違っているが, まったく同じであることが, そ

の後次第にわかってきた．そこで両者の対応について一言，触れておこう．

ゲージ場の理論では，4 次元時空 B の各点に，線形 Lie 群 G の n 個のパラメーターを座標とする群多様体 M を与える．したがって B の点 x の近傍 U_x では $4+n$ 次元の多様体 $U_x \times M$ というものが設定される．物質場 ψ は G に属する変換 $\boldsymbol{T}(a)$ により，

$$\psi(x) \rightarrow \psi(x, a) \overset{d}{\equiv} \boldsymbol{T}(a) \cdot \psi(x)$$

に変換される．変換前の $\psi(x)$ が定義されておれば，$\psi(x, a)$ は，$U_x \times M$ の上で定義された物質場となる．

数学では，局所的に $U_x \times M$ と書かれる多様体の全体をファイバー束とよび，B をその底空間，G は構造群，また M をファイバーという．

数学では時空 B の点 x と $x+\Delta x$ におけるファイバーをそれぞれ M_x，および $M_{x+\Delta x}$ とするとき，それぞれに属する点の間に 1 対 1 の対応を定義する．いま $a_x \in M_x$ に $a_{x+\Delta x} \in M_{x+\Delta x}$ が対応するとき，a_x と $a_{x+\Delta x}$ とは“平行”という．またこの対応が定義されたとき“接続”(connection) が定義されたという．

これは本書に述べたゲージ場の理論の記号を使えば

$$\psi(x+\Delta x, a_{x+\Delta x})_{//} = (\mathbf{1} - \Delta x^{\mu} A^{r}{}_{\mu} \boldsymbol{G}_{r}) \cdot \psi(x, a_x)$$

に相当する．

ここで注意すべきことがもうひとつある．ゲージ場の理論で普通，扱われる変換は，群 G によって引き起こされる，G 自身の群多様体 M の中の点の移動である．すなわち任意の点 $b \in M_x$ に対応する変換 $\boldsymbol{T}(b)$ により $\psi(x, a)$ は

$$\psi(x, a) \rightarrow \boldsymbol{T}(b) \cdot \psi(x, a) = \boldsymbol{T}(b \cdot a) \psi(x) = \psi(x, b \cdot a)$$

となる．これによって任意の点 $a \in M_x$ は $b \cdot a \in M_x$ に移される．この変換は，時空 B とは無関係である．

これに対する唯一の例外が重力場の理論の根拠となった一般座標変換である．これは底空間 B の座標変換群を G とみなしている．その結果，重力理論の場合の接続行列 $\boldsymbol{\Gamma}_{\mu}$ の変換則 (2.16)′ は，ゲージ場の一般論にでてくる接続行列 $\boldsymbol{A}_{\mu}$ の変換則(10.31)と異なる．前者ではよけいな係数 $\partial x^{a}/\partial x'^{\mu}$ がでてくる．また共変微分の変換則や曲率の変換則についても重力場の場合は，ゲージ場の一般論と少々異なるから注意を要する(p. 137, 138 参照)．

第IV編

統一理論への応用

12

GWS理論

12.1 問題の提起

一般ゲージ場を用いて初めて成功をおさめた実例が，これから述べるGWS理論である[14)].

S. Glashow, S. Weinberg および A. Salam は，それぞれ独立に，素粒子の間の電磁的相互作用と“弱い相互作用”を4個のゲージ場を用いて統一的に記述することに成功した．そこでこの理論を彼等の名前の頭文字をとってGWS理論，あるいは電弱統一理論という．

電磁場による相互作用は，弱い相互作用と一見，いちじるしい違いがある．前者は，距離の2乗に反比例して弱くなるとはいえ，その到達距離は無限の遠方にまで及ぶ．これに反して後者では，その到達距離は，せいぜい 10^{-16} cm ぐらいまでである．また相互作用の大きさを表わす相互作用定数としては，自然単位 ($\hbar=c=1$) を用いたとき，前者では $e^2=\alpha=1/137$ という無次元数になるが，後者では[長さ]^2 というディメンションが残るので，さらに核子の質量 m_{N} も単位として用いることにより，α に相当する弱い相互作用定数 G_{F} は，$G_{\mathrm{F}}\cdot(m_{\mathrm{N}})^2 \approx 0.1\times10^{-5}$ という小さな無次元数となる．

そのために，両者を統一的に記述しようとするとき，上述の違いをどのようにして導くかが問題となる．以下にこの理論の概要を述べよう．なお本書では量子化の問題には一切，ふれていないので，量子化に基づく発散の問題が繰り込み法によって，どのように処理されたかについては，すべて割愛する．

弱い相互作用を扱う場合，レプトン同士，あるいはレプトンとクォークの間の相互作用をすべて書きならべるべきであるが，本書では，電子と，その兄弟

粒子であるニュートリノ ν_e だけをとりあげる．他のレプトンや，クォークについても理論の形態はまったく同じであるから，それらはすべて省略する．

まず，記号の説明をしよう．

Dirac 行列に関する記号

$$\gamma^0 = -i\beta = -\gamma^{0\dagger}, \quad \gamma^k = -i\beta\alpha^k = (\gamma^k)^\dagger, \quad (k=1,2,3),$$
$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \gamma^{5\dagger}, \quad \gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu},$$
$$L = \frac{1}{2}(1-\gamma^5), \quad R = \frac{1}{2}(1+\gamma^5).$$

線形 Lie 群 $SU(2)$ に関する記号(**11.2** の定義との違いに注意)

$$\tau_1 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \frac{i}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$
$$[\tau_r, \tau_s] = \tau_t C_r{}^t{}_s,$$
$$C_r{}^t{}_s = \epsilon_{rts},$$
$$\kappa_{rs} \overset{d}{\equiv} -\frac{1}{2}C_r{}^a{}_b \cdot C_s{}^b{}_a = \delta_{rs}.$$

さて，レプトンに対しても，ハドロンと同様に，“弱アイソスピン” $T_r \overset{d}{\equiv} -i\tau_r$ $(r=1,2,3)$ および “弱ハイパーチャージ” Y_{W} という物理量を賦与する*⁾．これらはレプトンのもつ電荷 eQ と $Q=T_3+Y_{\mathrm{W}}$ という関係をみたす．ところでニュートリノには，現在は左巻きの粒子(粒子のもつ運動量 $\vec{p}$ と，そのスピン角運動量 $\vec{s}$ が平行でかつ同じ向きのとき，それを右巻き，また逆向きのとき左巻きという)だけが存在するとされている．そこで電子と一組にして，弱アイソスピン $T=1/2$ をもつ粒子対を構成するには，まず電子を左巻き電子 e_{L} と右巻き電子 e_{R} に分割する必要がある．なお，この統一理論では自由電子は，もともとはニュートリノと同じように質量をもたないものとする．現実の電子のもつ質量は，相互作用の結果，二次的に導かれるものと考える．

いま電子の波動関数を $\psi_{\mathrm{e}}(x)$ とすれば $e_{\mathrm{L}}, e_{\mathrm{R}}$ は

$$e_{\mathrm{L}}(x) \overset{d}{\equiv} \psi_{\mathrm{L}} \overset{d}{\equiv} L\psi_{\mathrm{e}}(x), \quad e_{\mathrm{R}}(x) \overset{d}{\equiv} \psi_{\mathrm{R}} \overset{d}{\equiv} R\psi_{\mathrm{e}}(x)$$

となる．L, R は記号表の中にあたえられている 4 次の行列である．

---

*⁾　本書の Y_{W} の代わりに $Y_{\mathrm{W}}/2$ と書く人もいるので注意されたい．

また ψ_ν は元来，左巻きだから $\psi_\nu = L\psi_\nu$ である．

そこで ν_e と e_L を一組にして

$$\begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ e_L(x) \end{pmatrix} \stackrel{d}{\equiv} \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \end{pmatrix} \stackrel{d}{\equiv} \begin{pmatrix} \psi_\nu \\ \psi_L \end{pmatrix} \tag{12.1}$$

と書く．これは $SU(2)$ に属する行列 $\boldsymbol{T}(a_1, a_2, a_3)$ [略して $\boldsymbol{T}(a)$] により

$$\psi^\alpha \to \psi'^\alpha \stackrel{d}{\equiv} \boldsymbol{T}(a)^\alpha{}_\beta \cdot \psi^\beta \qquad (\alpha = 1, 2)$$

のように変換されるものとする．特に無限小の局所的変換に対しては，ψ^α は次のような変換をうける：

$$\delta\psi^\alpha = \xi^r(x)(\tau_r)^\alpha{}_\beta \psi^\beta. \tag{12.2}$$

ここで τ_r は $SU(2)$ の生成元で

$$(\tau_r)^\alpha{}_\beta \stackrel{d}{\equiv} \frac{\partial}{\partial a^r} \boldsymbol{T}(a)^\alpha{}_\beta \bigg|_{a=0} \qquad (r = 1, 2, 3)$$

である．ψ^α として(12.1)という定義が許されるためには，記号表に与えられたような表現を τ_r に与えねばならない．

次に(12.1)の ψ^α のもつ弱ハイパーチャージ Y_W は，$Y_W = -1/2$ であるとする．この意味は $e^{i\theta} \in U(1)$ に対して

$$\psi^\alpha \to \psi'^\alpha = e^{i(-1/2)\theta} \psi^\alpha$$

という変換をうけるということである．特に無限小の局所的位相変換では

$$\delta\psi^\alpha = -\frac{i}{2}\eta(x)\psi^\alpha \tag{12.3}$$

のように変換される．

一方 e_R，すなわち ψ_R に対しては，$T=0, Y_W = -1$ とすれば，$SU(2)$ に対しては $\delta\psi_R = 0$，また局所的位相変換に対しては

$$\delta\psi_R = -i\eta(x)\psi_R \tag{12.4}$$

となる．なお ψ_L, ψ_R ともに電荷 $eQ = e(T_3 + Y_W)$ は $-e$ となっている．

上に述べた 4 個の任意関数 $\xi^r(x)$ $(r = 1, 2, 3)$ および $\eta(x)$ に対応して，4 個のゲージ場 $gA^r{}_\mu(x)$，および $g_1 B_\mu(x)$ が導入される．すなわち ψ^α，および ψ_R の共変微分は

$$\left.\begin{aligned}\nabla_\mu\psi^\alpha &= \partial_\mu\psi^\alpha + gA^r{}_\mu(\tau_r)^\alpha{}_\beta\psi^\beta - \frac{i}{2}g_1B_\mu\psi^\alpha,\\ \nabla_\mu\psi_{\mathrm{R}} &= (\partial_\mu - ig_1B_\mu)\psi_{\mathrm{R}}\end{aligned}\right\}\qquad(12.5)$$

となる．g, g_1 は無次元の相互作用定数である．

ここで $A^r{}_\mu, B_\mu$ の変換則は，無限小変換に対して

$$\left.\begin{aligned}\delta A^r{}_\mu &= \xi^s C_s{}^r{}_t A^t{}_\mu - \frac{1}{g}\xi^r{}_{,\mu},\\ \delta B_\mu &= -\frac{1}{g_1}\eta_{,\mu}\end{aligned}\right\}\qquad(12.6)$$

である．構造定数 $C_s{}^r{}_t$ は記号表に与えられている．

これらに対する曲率は(ここでは添字 r の上下については区別不要)

$$\left.\begin{aligned}F^r{}_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^r{}_\nu - \partial_\nu A^r{}_\mu + g\epsilon_{srt}A^s{}_\mu A^t{}_\nu,\\ G_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu\end{aligned}\right\}\qquad(12.7)$$

である．g, g_1 を導入した結果，一般論と少々違うので，注意されたい．

次にゲージ場およびレプトンの Lagrange 関数をそれぞれ

$$L_1 \stackrel{d}{\equiv} -\frac{1}{4}F_{r\mu\nu}F^{r\mu\nu} - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}G^{\mu\nu},\qquad(12.8)$$

$$L_2 = -\bar{\psi}_\alpha\gamma^\mu(\nabla_\mu\psi)^\alpha - \bar{\psi}_{\mathrm{R}}\gamma^\mu\nabla_\mu\psi_{\mathrm{R}}\qquad(12.9)$$

とする．さきに述べたように，レプトンはもともとは質量項をもたないとする．

ここで本節のはじめに述べた電弱相互作用の到達距離の違い，および相互作用定数に関する大小の差を導くためのきわめて重要な技巧について述べる．いままで述べてきた範囲では長さのディメンションをもつ定数はどこにもない．したがって力の到達距離とか，[長さ]^2 のディメンションをもつ弱相互作用定数を理論的に導くためには，長さのディメンションをもつ定数を何か理由をもうけて，理論の中にあらかじめ用意しておく必要がある．場を量子化したときに必ずでてくる発散の問題を回避するために用いる cut-off の定数はこの一例である．あるいは空間(さらに時空)を連続体とみなす考えを棄てて，これを一定の微小な間隔をもって格子状に配列する点の 3 次元的集団と考えることにより，格子定数という形で，[長さ] を導入するという方法もある．これは cut-off の方法の変形である．しかし GWS 理論では次ぎに述べる Higgs 場の導入という

方法を採用した.

12.2 Higgs 場の導入

いま $SU(2)$ の2次元表現によって変換される2個の複素スカラー場 φ^α ($\alpha=1,2$) を考える. これは弱アイソスピン T が1/2, また弱ハイパーチャージも1/2をもつものとする. これを創案者の名を借りて Higgs 場という.

これの無限小局所的変換に対する変換則は

$$\left.\begin{aligned}\partial\varphi^\alpha &= \xi^r(\tau_r\varphi)^\alpha+\frac{i}{2}\eta\varphi^\alpha,\\ \partial\varphi^\dagger{}_\alpha &= -\xi^r\varphi^\dagger{}_\beta(\tau_r)^\beta{}_\alpha-\frac{i}{2}\eta\varphi^\dagger{}_\alpha\end{aligned}\right\} \tag{12.10}$$

である. ここで $\varphi^\dagger$ とは次の量である:

$$\varphi^\dagger{}_\alpha \overset{d}{\equiv} (\varphi^\alpha)^*.$$

$\varphi^\dagger{}_\alpha$ の添字を下につけたのは, これが横一行にならんだ2次元ベクトルということを示す. また記号表からわかるように $(\tau_r)^\dagger=-\tau_r$ という関係に注意されたい.

そこで $\varphi^\alpha, \varphi^\dagger{}_\alpha$ の共変微分は

$$\left.\begin{aligned}(\nabla_\mu\varphi)^\alpha &\overset{d}{\equiv} \partial_\mu\varphi^\alpha+gA^r{}_\mu(\tau_r\varphi)^\alpha+\frac{i}{2}g_1B_\mu\varphi^\alpha,\\ (\nabla_\mu\varphi^\dagger)_\alpha &\overset{d}{\equiv} \partial_\mu\varphi^\dagger{}_\alpha-gA^r{}_\mu(\varphi^\dagger\tau_r)_\alpha-\frac{i}{2}g_1B_\mu\varphi^\dagger{}_\alpha.\end{aligned}\right\} \tag{12.11}$$

さて Higgs 場の Lagrange 関数を

$$L_3 = -(\nabla_\mu\varphi^\dagger)_\alpha(\nabla^\mu\varphi)^\alpha+\frac{a^2}{2}(\varphi^\dagger{}_\alpha\varphi^\alpha)-\lambda^2(\varphi^\dagger{}_\alpha\varphi^\alpha)^2 \tag{12.12}$$

とする. さらに φ^α とレプトンとの相互作用を表わす

$$L_4 = -G\{(\bar{\psi}_\alpha\psi_{\rm R})\varphi^\alpha+\varphi^\dagger{}_\alpha(\bar{\psi}_{\rm R}\psi^\alpha)\} \tag{12.13}$$

も必要である. L_4 が $SU(2)$, および $U(1)$ に対して不変なことは容易にわかるであろう. L_3, L_4 の中にでてきた a, λ, G はいずれも未定の定数である.

L_3 の第2項は, 一見, Higgs 場の質量(厳密にいえば, Higgs 場を量子化したときに登場する Higgs 粒子という名の量子が持つ質量を意味する. 今後, ○

○場の質量というときは，常にこのように理解されたい)のように思われるが，それはこの項の符号をマイナスに変えた場合である．

ところで，この物理系から十分遠く離れた所では，すべての場が(古典論では) 0 になると考えてよかろう．その場合，上述の 4 種の Lagrange 関数から導かれるエネルギー密度はいずれも 0 となる．しかし Higgs 場は，通常の場とは異なり，L_3 から導かれるエネルギーは，最小とはならない．つまり $\varphi^\alpha=0$ という状態は真空状態(エネルギーの最低状態)とは異なる．L_3 から導かれるエネルギー密度には*)

$$-\frac{a^2}{2}|\varphi|^2+\lambda^2(|\varphi|^2)^2$$

という項がある．この値が最小になるのは $|\varphi|^2=a^2/(2\lambda)^2$ という場合で，その時のエネルギー密度は $-a^4/(4\lambda)^2$ となる．

しかも，ゲージ場 $A^r{}_\mu, B_\mu$ がいずれも 0 のとき，φ^α 場の方程式を満足するもののなかで $\varphi^\alpha(x)=\text{const.}$ という解は，普通とは異なり，$\varphi^\alpha(x)\equiv 0$ の他に，さらに $|\varphi(x)|^2=(a/2\lambda)^2$ という 0 でない解も存在する．したがって，エネルギー密度を $-a^4/(4\lambda)^2$ にするような φ 場は存在しうることになる．もし L_3 の第 2 項の符号が普通の質量項と同様にマイナスならば，$\varphi^\alpha(x)=\text{const.}$ という解は $\varphi^\alpha\equiv 0$ しかなく，またそのときエネルギーも最小値となる．Higgs 場が何故にいろいろのメリットをもたらしたか，その秘密の鍵はまさに上に述べたような点にある．

そこで，これから $\mu=a/2\lambda$ という未定の定数を用いて

$$\varphi^1=\phi^1(x), \qquad \varphi^2=\mu+\phi^2(x) \tag{12.14}$$

という書きかえをする．$\phi^\alpha=0$ とすることはエネルギーを最小にすることを意味する．

この書きかえにより L_4 は

$$L_4=-G\{(\bar{\psi}_\alpha\psi_{\rm R})\phi^\alpha+\phi^\dagger{}_\alpha(\bar{\psi}_{\rm R}\phi^\alpha)\}-m_{\rm e}\bar{\psi}_{\rm e}\psi_{\rm e}, \qquad m_{\rm e}=G\mu \tag{12.15}$$

となる．(12.15) の最後の項は φ^2 と ϕ^2 の差 μ に比例する量をまとめたもので，$m_{\rm e}$ はまさに電子の質量とみなすべきものである．それゆえ，今後はこの第 2 項

*) $(\varphi^\dagger{}_\alpha\varphi^\alpha)$ を $|\varphi|^2$ とかくことにする．

は，L_2 に移す．

次に(12.14)を用いて $(\nabla_\mu\varphi)^\alpha$ をかきかえると

$$(\nabla_\mu\varphi)^\alpha=(\nabla_\mu\phi)^\alpha+g\mu(\boldsymbol{A}_\mu)^\alpha{}_2+\frac{i}{2}g_1\mu B_\mu\delta^\alpha{}_2 \tag{12.11$'$}$$

となる．ここで

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_\mu\overset{d}{\equiv}A^r{}_\mu\tau_r=\frac{i}{2}\begin{pmatrix}A^3{}_\mu & \sqrt{2}\,W^*{}_\mu\\ \sqrt{2}\,W_\mu & -A^3{}_\mu\end{pmatrix},\\&\frac{1}{\sqrt{2}}(A^1{}_\mu+iA^2{}_\mu)=W_\mu,\\&\frac{1}{\sqrt{2}}(A^1{}_\mu-iA^2{}_\mu)=W^*{}_\mu\end{aligned}\right\} \tag{12.16}$$

という記号を用いた．

そこで $|\nabla\varphi|^2\overset{d}{\equiv}(\nabla_\mu\varphi^\dagger)_\alpha(\nabla^\mu\varphi)^\alpha$ は

$$\begin{aligned}-|\nabla\varphi|^2=&-|\nabla\phi|^2-g\mu\left\{(\nabla\phi^\dagger)_\alpha\boldsymbol{A}^\alpha{}_2-\boldsymbol{A}^2{}_\alpha(\nabla\phi)^\alpha\right\}\\&-\frac{i}{2}g_1\mu B\left\{(\nabla\phi^\dagger)_2-(\nabla\phi)^2\right\}-\left(\frac{g\mu}{\sqrt{2}}\right)^2|W|^2\\&-\frac{\mu^2}{4}\left\{g^2(A^3)^2-2gg_1(B\cdot A^3)+g_1{}^2(B)^2\right\}\end{aligned} \tag{12.17}$$

となる*)．

ここで $A^3{}_\mu, B_\mu$ の代わりに，$Z^0{}_\mu, A_\mu$ を

$$Z^0{}_\mu=\frac{1}{\sqrt{g^2+g_1{}^2}}(gA^3{}_\mu-g_1B_\mu),\qquad A_\mu=\frac{-1}{\sqrt{\cdots}}(g_1A^3{}_\mu+gB_\mu) \tag{12.18}$$

のように定義する．あるいは

$$A^3{}_\mu=\frac{1}{\sqrt{\cdots}}(gZ^0{}_\mu-g_1A_\mu),\qquad B_\mu=\frac{-1}{\sqrt{\cdots}}(g_1Z^0{}_\mu+gA_\mu) \tag{12.18$'$}$$

という書きかえをすると，(12.17)の第4, 5項は

$$\left.\begin{aligned}&-(m_{\mathrm{W}})^2|W|^2-\frac{1}{2}(m_{\mathrm{Z}})^2(Z^0)^2,\\&m_{\mathrm{W}}=g\mu/\sqrt{2},\qquad m_{\mathrm{Z}}=\mu\sqrt{g^2+g_1{}^2}/\sqrt{2}\end{aligned}\right\} \tag{12.19}$$

となる．

---

*) ∇_μ や $\boldsymbol{A}_\mu$ 等，4元ベクトルの成分を示す添字を省略した．

(12.19)はゲージ場$W_\mu, W^*{}_\mu$が質量$m_{\rm W}$をもち，$Z^0{}_\mu$の質量は$m_{\rm Z}(>m_{\rm W})$であることを示す．さらにA_μは(12.19)のような質量項をもたないから，それの質量は0である．そこでこのA_μを電磁場とみなす．

一方$Z^0{}_\mu$はW_μとともに質量をもつから，その作用の到達距離は，それぞれ$1/m_{\rm Z}$，および$1/m_{\rm W}$の程度と考えられる．これらが10^{-16} cmの程度となるためには$m_{\rm W}, m_{\rm Z}$は大体，核子の質量の約100倍の大きさとすればよい．このようにν_eおよびA_μは質量をもたないが，電子や$Z^0{}_\mu, W_\mu$に対しては，質量を表わす項が導かれたのは，すべて，φ場のシフト(12.14)のおかげである．そこで(12.17)の最後の二つの項，つまり(12.19)をL_1の方に移すことにする．

$(\nabla_\mu\phi)^\alpha$についても$W_\mu, Z^0{}_\mu, A_\mu$を用いて書きかえると

$$\left.\begin{aligned}(\nabla_\mu\phi)^1 &= \left(\partial_\mu - ieA_\mu + i\frac{g^2-g_1{}^2}{\sqrt{g^2+g_1{}^2}}Z^0{}_\mu\right)\phi^1 + \frac{i}{\sqrt{2}}gW^*{}_\mu\phi^2,\\ (\nabla_\mu\phi)^2 &= \left(\partial_\mu - \frac{i}{2}\sqrt{g^2+g_1{}^2}Z^0{}_\mu\right)\phi^2 + \frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu\phi^1\end{aligned}\right\} \qquad (12.20)$$

となる．ここでeは

$$e \stackrel{d}{\equiv} \frac{gg_1}{\sqrt{g^2+g_1{}^2}} \qquad (12.21)$$

である．このeを陽電子のもつ電荷と同一とみなしてよいということは，後の，レプトンの話を見ればわかる．

(12.20)の第1式には$(\partial_\mu - ieA_\mu)\phi^1$という項がある．これは$\phi^1$が$+e$の電荷をもつことを示す．また第2式から，$\phi^2$は電気的に中性であることもわかる．

いまϕ^αを実部と虚部に分けて

$$\phi^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{C_1(x)+iC_2(x)\},$$

$$\phi^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\sigma(x)+iC_3(x)\},$$

とおけば，

$$|\phi|^2 = \frac{1}{2}\left\{\sum_{a=1}^{3}(C_a)^2+\sigma^2\right\}$$

となる．またWおよびZ^0の質量項を除いたL_3は次のようになる：

$$L'_3 = -|\nabla\phi|^2 + i\frac{g\mu}{\sqrt{2}}\left\{W(\nabla\phi)^1 - W^*(\nabla\phi)^{*1}\right\}$$
$$+ i\frac{\mu}{2}\sqrt{g^2+g_1{}^2}Z^0\left\{(\nabla\phi)^{*2} - (\nabla\phi)^2\right\} - \frac{1}{2}(m_\sigma)^2\sigma^2$$
$$-2\sqrt{2}\,\mu\lambda^2\sigma|\phi|^2 - \lambda^2(|\phi|^2)^2 + \lambda^2\mu^4, \qquad (12.22)$$

$$m_\sigma \stackrel{d}{\equiv} 2\mu\lambda. \qquad (12.23)$$

(12.22)の中には const$\cdot(C_a)^2$ という項はないから $C_a\,(a=1,2,3)$ 場の質量は 0 である．これに対して σ 場は m_σ という質量をもった電荷 0 の場である．

そこで適当に選ばれた関数 ξ^r と η を用いて，変換 $SU(2)\times U(1)$ を施すことによって，A_μ には $\partial_\mu A^\mu=0$ を満足させ，3 個の C_a 場は 0 となるようにする．このようなゲージ条件を設けると，(12.22)は次のようになる〔(12.22)の最後の定数項は不要だから省く〕:

$$L'_3 = -\frac{1}{2}\left|(\partial_\mu - \frac{i}{2}\sqrt{g^2+g_1{}^2}Z^0{}_\mu)\sigma\right|^2 - \frac{1}{2}(m_\sigma)^2\sigma^2$$
$$-\frac{1}{4}g^2|W|^2\sigma^2 - \frac{g^2\mu}{\sqrt{2}}\sigma|W|^2 - \frac{\mu}{2\sqrt{2}}(g^2+g_1{}^2)|Z^0|^2\sigma$$
$$-\sqrt{2}\,\mu\lambda^2\sigma^3 - \frac{\lambda^2}{4}\sigma^4. \qquad (12.24)$$

次に L_2 を書きかえよう．まず $\nabla_\mu\psi^\alpha, \nabla_\mu\psi_{\mathrm{R}}$ は，Z^0, A, W を使うと次のようになる:

$$(\nabla_\mu\psi)^1 = \left(\partial_\mu + \frac{i}{2}\sqrt{g^2+g_1{}^2}Z^0{}_\mu\right)\psi_\nu + \frac{i}{\sqrt{2}}gW^*{}_\mu L\psi_{\mathrm{e}},$$
$$(\nabla_\mu\psi)^2 = \left(\partial_\mu + ieA_\mu - i\frac{g^2-g_1{}^2}{2\sqrt{g^2+g_1{}^2}}Z^0{}_\mu\right)L\psi_{\mathrm{e}} + \frac{i}{\sqrt{2}}gW_\mu\psi_\nu,$$
$$\nabla_\mu\psi_{\mathrm{R}} = \left(\partial_\mu + ieA_\mu + i\frac{g_1{}^2}{\sqrt{g^2+g_1{}^2}}Z^0{}_\mu\right)R\psi_{\mathrm{e}}.$$

そこで L_2+L_4 を L_{2+4} とかけば，次のようになる:

$$L_{2+4} = -\bar{\psi}_{\mathrm{e}}\left[\gamma^\mu\left(\partial_\mu + ieA_\mu - \frac{i}{4}\frac{g^2-3g_1{}^2}{\sqrt{g^2+g_1{}^2}}Z^0{}_\mu\right) + m_{\mathrm{e}}\right]\psi_{\mathrm{e}}$$
$$-\bar{\psi}_\nu\gamma^\mu\left(\partial_\mu + \frac{i}{2}\sqrt{g^2+g_1{}^2}Z^0{}_\mu\right)\frac{1-\gamma_5}{2}\psi_\nu$$

$$-\frac{i}{4}\sqrt{g^2+g_1{}^2}\cdot\bar{\psi}_e\gamma^\mu\gamma^5\psi_e Z^0{}_\mu-\frac{G}{\sqrt{2}}\sigma\bar{\psi}_e\psi_e$$

$$-i\frac{g}{2\sqrt{2}}\left\{W_\mu{}^*\bar{\psi}_\nu\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_e+W_\mu\bar{\psi}_e\gamma^\mu(1-\gamma_5)\psi_\nu\right\} \quad (12.25)$$

上の式の$(\partial_\mu+ieA_\mu)\psi_e$という項を見れば，電子が$-e$という電荷をもち，ニュートリノは電荷も質量ももたないことがわかる．

最後にL_1を書きかえよう．$W_\mu, A_\mu, Z^0{}_\mu$を用いると

$$F^1{}_{\mu\nu}=\frac{1}{\sqrt{2}}\{W^*{}_{\mu\nu}+W_{\mu\nu}\},$$

$$F^2{}_{\mu\nu}=\frac{i}{\sqrt{2}}\{W^*{}_{\mu\nu}-W_{\mu\nu}\}$$

となる．ここで

$$W_{\mu\nu}\stackrel{d}{\equiv}\left(\partial_\mu+ieA_\mu-i\frac{g^2}{\sqrt{g^2+g_1{}^2}}Z^0{}_\mu\right)W_\nu$$

$$-(\mu\text{ と }\nu\text{ をいれかえた項}). \quad (12.26)$$

また$F^3{}_{\mu\nu}, G_{\mu\nu}$も同様に書きかえたのち，$L_1$に代入し，さらに(12.17)の第4，5項，すなわち(12.19)を加えると

$$L'_1=-\frac{1}{2}W^*{}_{\mu\nu}W^{\mu\nu}-\frac{1}{4}Z^0{}_{\mu\nu}Z^{0\mu\nu}-\frac{1}{4}f_{\mu\nu}f^{\mu\nu}$$

$$-(m_W)^2W^*{}_\mu W^\mu-\frac{1}{2}(m_Z)^2Z^0{}_\mu Z^{0\mu}$$

$$+\frac{i}{2}\left(ef^{\mu\nu}-\frac{g^2}{\sqrt{g^2+g_1{}^2}}Z^{0\mu\nu}\right)W^*{}_{[\mu}W_{\nu]}$$

$$+\frac{g^2}{4}(W^*{}_{[\mu}W_{\nu]})^2 \quad (12.27)$$

となる．ここで

$$Z^0{}_{\mu\nu}\stackrel{d}{\equiv}\partial_\mu Z^0{}_\nu-\partial_\nu Z^0{}_\mu, \qquad f_{\mu\nu}\stackrel{d}{\equiv}\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu \quad (12.28)$$

である．

(12.26)を見ればW_νは$-e$の電荷を，$W^*{}_\nu$は$+e$の電荷をもち，また(12.28)から，$Z^0{}_\mu, A_\mu$は電荷をもたないことがわかる．さらに(12.27)の最後から2番目の項はW_μ場が磁気能率をもつことを示している．

以上ですべての Lagrange 関数が求まったから，それらをすべてたし合わせることにより全 Lagrange 関数 L_{tot} は

$$L_{\mathrm{tot}} = L'_1 + L_{2+4} + L'_3 \tag{12.29}$$

となる．

12.3 理論の成果

ここでレプトン同士が直接，相互作用していると考えた従来の理論における弱相互作用定数 G_{F} を(12.29)から導いてみよう．

まず Higgs 場 σ を無視し，W_μ のみたすべき方程式を求めてみる．Hamilton の変分原理により

$$\Box W^\mu - \partial^\mu \partial_\nu W^\nu - (m_{\mathrm{W}})^2 W^\mu - \frac{ig}{2\sqrt{2}} \bar{\psi}_\nu \gamma^\mu (1-\gamma_5) \psi_{\mathrm{e}} = 0. \tag{12.30}$$

ここでは W 場の 2 次以上の項とか，W と A_μ や $Z^0{}_\mu$ との相互作用はすべて無視した．

いま，レプトン同士の間に交換される W 場の波長よりも W 場に基づく力の到達距離 $1/m_{\mathrm{W}}$ の方がはるかに短いとすれば，W 場を仲介とせず，レプトン同士が触れ合ったときにのみ，直接に相互作用すると考えた従来の考え方は容認される．このような場合には(12.30)の第 3 項に比べ，第 1，2 項は無視してよい．そこで

$$W^\mu \approx -\frac{ig}{2\sqrt{2}(m_{\mathrm{W}})^2} \bar{\psi}_\nu \gamma^\mu (1-\gamma_5) \psi_{\mathrm{e}}.$$

同様に

$$(W^\mu)^* \approx \frac{+ig}{2\sqrt{2}(m_{\mathrm{W}})^2} \left\{ -\bar{\psi}_{\mathrm{e}} \gamma^\mu (1-\gamma_5) \psi_\nu \right\}.$$

これらを(12.25)の最後の項 $\{\cdots\}$ および(12.27)の $-(m_{\mathrm{W}})^2 W^*{}_\mu W^\mu$ に代入して，W, W^* を消去してしまうと，L_{tot} の中でレプトンの弱相互作用を表わす項は

$$-\frac{g^2}{8(m_{\mathrm{W}})^2} \left\{ \bar{\psi}_{\mathrm{e}} \gamma^\mu (1-\gamma_5) \psi_\nu \right\} \left\{ \bar{\psi}_\nu \gamma_\mu (1-\gamma_5) \psi_{\mathrm{e}} \right\}$$

となる．そこで従来の理論の G_{F} は

$$\frac{1}{\sqrt{2}}G_F = \frac{g^2}{8(m_W)^2}. \tag{12.31}$$

この理論で特に注目すべきことは，g, g_1, μ, λ, G という未知の定数(この中で μ だけが[長さ]$^{-1}$ というディメンションをもつ)を用いて，(12.15)から m_e, (12.19)により m_W, m_Z，(12.21)から e，また(12.23)により m_σ を導いたのみならず，さらに(12.31)により G_F と他の定数の間に

$$\frac{1}{\sqrt{2}}G_F = \frac{(m_Z)^2}{(m_Z)^2-(m_W)^2}\frac{e^2}{(m_W)^2}$$

という関係のあることも導いたことである．

これよりもっと重要なことは，電気的に中性で，核子の質量の 100 倍近い大きな質量をもつベクトル場が存在すべきことを予言したことである．

この予言が後に実験的にも証明され，Glashow たち 3 人はノーベル賞を受賞した．それと同時に，それまでほとんど関心をもたれなかった一般ゲージ場の利用価値が急に学界で注目をあびるようになった．

13

重力場とゲージ場の統一理論

13.1　高次元時空と計量テンソル

重力を表わす$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$がゲージ場のひとつであることはすでに第11章で述べた．したがって本章の表題はいささか理解しかねるかも知れない．ここでいうゲージ場とは，重力場以外の一般ゲージ場を指す．

Kaluzaは時空を5次元Riemann空間とみなし，重力場のポテンシャル$g_{\mu\nu}$と電磁ポテンシャルA_μを，5次元空間の計量テンソルを用いて統一的に表現することを提唱した．この考えを手本として線形Lie群Gのn個のパラメーターa^r $(r=1,2,\cdots,n)$と4次元時空に属する点の座標x^μ $(\mu=0,\cdots,3)$を一緒にした数の組$(x^0,\cdots,x^3,a^1,\cdots,a^n)$を座標にもつ点の集合，すなわち$4+n$次元の距離空間$R_{4+n}$を考える．いま$(x^0,\cdots,x^3)$を$(u^1,\cdots,u^4)$と書き，また$(a^1,\cdots,a^n)$を$(u^5,\cdots,u^{4+n})$と書きかえることにより，$R_{4+n}$の中の点の座標を$u^A$ $(A=1,2,\cdots,4+n)$で表わそう．さらにその計量テンソルをG_{AB}とする．これを用いて$g_{\mu\nu}$と$A^r{}_\mu$を統一的に書き表わそうという試みが本章の主題である．

超時空R_{4+n}の中の2点u^Aとu^A+du^Aの間の距離dSは

$$dS^2=G_{AB}(u)du^Adu^B \tag{13.1}$$

で与えられる．

このdS^2を不変にする座標変換として特に

$$\left.\begin{aligned} x^\mu &\to x'^\mu = h^\mu(x) \\ a^r &\to a'^r = f^r\{b(x);a\} = \mathrm{func}(x,a) \end{aligned}\right\} \tag{13.2}$$

を考える．ここでn次元の群多様体をMとするとき，$b,a\in M$，またf^rはLie群Gのパラメーターの結合則を規定する既知の関数である．なお変換(13.2)を

ひき起こしたパラメーター b^r は x に依存すると考えてよい．つまり(13.2)は，x については座標変換だが a^r については，M の中の点変換(点の移動)である．あるいは b による M の上の自己準同型写像といってもよい．

ところで，Kaluza の理論にならって G_{AB} を，$g_{\mu\nu}$ と $A^r{}_\mu$ を用いて書き表わすにあたり，そこに登場する各種の量にディメンションをもたせるために，いま長さのディメンションをもつ定数 α を導入する．x^μ は必ずしも長さのディメンションをもつとはかぎらぬが，ここではすべて長さのディメンション(これを [L] と書く)をもつとする．そこでディメンションに関して次のような表ができあがる：

$$[a^r]=[\mathrm{L}]^0,\quad [x^\mu]=[\mathrm{L}],\quad [\alpha]=[\mathrm{L}],$$
$$[g_{\mu\nu}]=[\mathrm{L}]^0,\quad [A^r{}_\mu]=[\mathrm{L}]^{-1},$$
$$[G_{\mu\nu}]=[\mathrm{L}]^0,\quad [G_{r\mu}]=[G_{\mu r}]=[\mathrm{L}],$$
$$[G_{rs}]=[\mathrm{L}]^2,\quad [dS^2]=[\mathrm{L}]^2.$$

ここでギリシャ文字 $\mu,\nu,\cdots$ は x-空間に関する添字で，それは $(0,\cdots,3)$ を表わす．一方，群 G に関係する添字はラテン文字 $r,s,\cdots$ で表わされる．後者は $(1,2,\cdots,n)$ を代表するものとする．

そこで $G_{AB}(u)$ を次のようにおく：

$$G_{AB}\overset{d}{\equiv}\begin{pmatrix}G_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}+\alpha^2X(a)_{rs}A^r{}_\mu A^s{}_\nu, & G_{\mu s}=\alpha^2A^r{}_\mu Y(a)_{rs}\\ G_{r\nu}=\alpha^2A^s{}_\nu Y(a)_{sr}, & G_{rs}=\alpha^2Z(a)_{rs}\end{pmatrix}. \qquad (13.3)$$

$g_{\mu\nu}(x)$ は第2章で説明したように，x-変換に対して2階共変テンソルとしてふるまうものとする．また x はそのままとし，a^r だけが $a^r\to a'^r=f^r\{b(x);a\}$ という変換(これをゲージ変換とよぼう)をうけるとき，それに応じて $A^r{}_\mu(x)$ は

$$A^r{}_\mu(x)\to A'^r{}_\mu(x)=\mathrm{Ad}(b)^r{}_sA^s{}_\mu(x)-L^{-1}(b)^r{}_s\partial b^s(x)/\partial x^\mu \qquad (13.4)$$

のように変換されるものとする[(10.27)′，および p.167 の(B.43)のつぎにある $\mathrm{Ad}(a)$ に関する説明を参照]．

もし(13.2)のような変換を考えるときは，$A^r{}_\mu$ には次の二通りの変換が考えられる：(イ) まずゲージ変換 $a\to a'$ を行ない，続いて x-変換 $x\to x'$ を行なう．(ロ) まず変換 $x\to x'$ を行ない，後に $a^r\to a'^r=f^r\{b'(x');a\}$ を行なう．ここで $b(x)$ に x-変換を施したものが $b'(x')$ である．しかし $b(x)$ は時空内の点の関数であり，点の位置を表わす座標が変更されようとも，b の値には変化はないは

ずである．それゆえ，$b^r(x)=b'^r(x')$，つまり x-変換に対して $b^r(x)$ は n 個のスカラーである．この事実を思い起こせば，上記の(イ)，(ロ)いずれを採ろうとも，変換(13.2)を施した後の $A'^r{}_\mu(x')$ には違いはない．それは

$$A'^r{}_\mu(x') = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\left[\mathrm{Ad}\{b(x)\}^r{}_s A^s{}_\nu(x) - L^{-1}(b)^r{}_s \frac{\partial b^s(x)}{\partial x^\nu}\right] \qquad (13.5)$$

で与えられる．

(13.3)にでてきた X, Y, Z はすべて a^r だけの関数とする．X, Z は添字 r, s について対称だが，Y は対称とはかぎらないから，添字の順序に注意を要する．

ところでこれらの関数は a だけに依存し，その成分を表わす添字も群 G だけに関係している．したがって，その a に関する関数形は群 G の構造だけにより規定されていると考えられる．それゆえ，ゲージ変換 $a\to a'$ に対し，その関数形には変化はなく，ただその中に含まれる変数 a を a' に置き変えれば，変換後の量が求められると考えてよい．

以上で準備は完了したから，いよいよ本題に移ろう．われわれの問題は，『変換(13.2)に対して，$g_{\mu\nu}$ は2階共変テンソルとして変換され，$A^r{}_\mu$ は(13.5)のように変換されるとき，G_{AB} が

$$G_{AB}(u) \to G'_{AB}(u') = \frac{\partial u^D}{\partial u'^A}\frac{\partial u^E}{\partial u'^B}G_{DE}(u) \qquad (13.6)$$

のように変換されるためには，X, Y, Z は a のどのような関数であればよいか』ということである．

すでに述べたように，X, Y, Z は群 G の性質だけにより規定された関数であるから，それを求めるには，無限小の $\xi^r(x)$ を用いたゲージ変換

$$\left.\begin{aligned} &x^\mu : \text{変換されない} \\ &a^r \to a'^r = a^r + \xi^s(x)L(a)^r{}_s, \\ &L(a)^r{}_s \overset{d}{\equiv} \frac{\partial}{\partial b^s}f^r(b\,;a)\bigg|_{b=0} \end{aligned}\right\} \qquad (13.7)$$

を考えれば十分である〔付録B，特に(B.22)参照〕．

(13.7)に対する G_{AB} の変換則を調べるにあたり以下の三つの場合に分けて考える．まず(13.6)の A, B がいずれも $(5, \cdots, 4+n)$ の場合を考えよう．この場合には(13.6)は次のようになる：

$$Z_{rs}(a')=\frac{\partial a^p}{\partial a'^r}\frac{\partial a^q}{\partial a'^s}Z_{pq}(a). \tag{13.6a}$$

x, a は(13.7)から(ξ の1次までの近似で)，次のように表わされる：

$$a^r=a'^r-\xi^s(x')L(a')^r{}_s,\qquad x^\mu=x'^\mu. \tag{13.7$'$}$$

a' と x' とは独立，a と x も互いに独立であることに注意すると

$$\frac{\partial a^r}{\partial x'^\mu}=-\xi^s{}_{,\mu}L(a')^r{}_s,\qquad \frac{\partial a^p}{\partial a'^r}=\delta^p{}_r-\xi^s L(a')^p{}_{s,r}. \tag{13.8}$$

ここで $L(a')^p{}_{s,r}$ は $\partial L(a')^p{}_s/\partial a'^r$ を表わす．なおここに出てきた記号については付録Bを参照されたい．

(13.8)を使うと(13.6a)は次のようになる(注：$Z_{rs,p}\overset{d}{=}\partial Z_{rs}(a)/\partial a^p$)：

$$Z_{rs,p}L^p{}_t=-(L^p{}_{t,r}Z_{ps}+L^p{}_{t,s}Z_{pr}).$$

この式の $Z_{rs}(a)$ を $\gamma_{rs}(a)$ に書きかえれば，これは付録の(B.24)とまったく同じ方程式となる．そこでその解は(B.30)により

$$Z_{rs}(a)=C_{pq}R^{-1}(a)^p{}_r\cdot R^{-1}(a)^q{}_s \tag{13.9}$$

となる．ここで $C_{pq}(=C_{qp})$ は a^r に無関係な n 次の正方行列の (p,q) 要素である．ただし $\det(C_{pq})\neq 0$ という条件を満たせばなんでもよい．

さてこれからはKilling形式

$$\kappa_{rs}=-C_r{}^p{}_q C_s{}^q{}_p=\kappa_{sr} \tag{B.37$'$}$$

が逆行列 $(\kappa^{-1})^{rs}$ をもつ場合だけを考えよう．そのような場合には C_{pq} として κ_{pq} を用いれば

$$Z_{rs}(a)=\kappa_{pq}L^{-1}(a)^p{}_r L^{-1}(a)^q{}_s \tag{13.9$'$}$$

と書くこともできる．なぜならば(B.43)から

$$\kappa_{ru}\mathrm{Ad}(a)^u{}_v(\kappa^{-1})^{vs}=\mathrm{Ad}(a^{-1})^s{}_r. \tag{B.43}$$

ここで変換 $\boldsymbol{T}(a)\in G$ の随伴表現行列 $\mathrm{Ad}\{\boldsymbol{T}(a)\}$ を簡単に $\mathrm{Ad}(a)$ と書くことにした．

一方 $\mathrm{Ad}(a)$ は(10.23)″により

$$\mathrm{Ad}(a)^u{}_v=L^{-1}(a)^u{}_w\cdot R(a)^w{}_v \tag{10.23$''$}$$

である．これを(B.43)に代入し $\mathrm{Ad}(a^{-1})=\{\mathrm{Ad}(a)\}^{-1}$ を思い起こせば，(13.9)′と(13.9)の等しいことが容易にわかるであろう．なおここでは(13.7)′に L がでてくるので(13.9)よりも(13.9)′の方が好都合だから，Z_{rs} としては(13.9)′

の解を採用する.

つぎに添字 A は $(1, \cdots, 4)$, B は $(5, \cdots, 4+n)$ の場合を考えよう. この場合には(13.6)は

$$\alpha^2 A'^s{}_\mu(x) Y_{sr}(a') = \frac{\partial a^s}{\partial a'^r}\left\{\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} G_{s\nu}(u) + \frac{\partial a^p}{\partial x'^\mu} G_{sp}(u)\right\}_{x=x'} \qquad (13.6\text{b})$$

となる. ここで左辺の $A'^s{}_\mu(x)$ は(13.4)から(ξ の1次までの近似で)次のようになる:

$$A'^s{}_\mu(x) = A^s{}_\mu + \xi^p C_p{}^s{}_q A^q{}_\mu - \xi^s{}_{,\mu}. \qquad (13.4)'$$

(13.9)′ および (13.4)′ を用いると(13.6b)の ξ の1次の項は

$$\begin{aligned}&(\xi^p C_p{}^s{}_q A^q{}_\mu - \xi^s{}_{,\mu}) Y_{sr} + A^s{}_\mu Y_{sr,p} L^p{}_q \xi^q \\ &= -\xi^p L^s{}_{p,r} A^t{}_\mu Y_{ts} - \xi^s{}_{,\mu} L^p{}_s \kappa_{ab} (L^{-1})^a{}_r (L^{-1})^b{}_p \qquad (13.10)\end{aligned}$$

となる.

両辺の $\xi^s{}_{,\mu}$ の係数を比べると, Y_{sr} が求まる:

$$Y_{sr} = \kappa_{sq} (L^{-1})^q{}_r. \qquad (13.11)$$

この結果を(13.10)に代入した場合, (13.10)が成りたつためには, 次の等式が成立すればよい:

$$C_u{}^s{}_t (L^{-1})_{sr} + (L^{-1})_{tr,p} L^p{}_u + L^s{}_{u,r} (L^{-1})_{ts} = 0. \qquad (13.10)'$$

この第2項は次のように書きかえることができる:

$$-(L^{-1})_{tk} (L)^k{}_{l,p} L^p{}_u (L^{-1})^l{}_r.$$

また(13.10)′ の第3項は次のように書きかえられる:

$$L^s{}_{u,p} L^p{}_l (L^{-1})^l{}_r (L^{-1})_{ts}.$$

(13.10)′ をこのように書きかえたのち公式

$$L^t{}_{r,p} L^p{}_s - L^t{}_{s,p} L^p{}_r = C_r{}^p{}_s L^t{}_p \qquad (13.12)$$

を用いれば, $C_{rst}\,(\overset{d}{\equiv} \kappa_{su} C_r{}^u{}_t)$ が添字について完全反対称であることを思い起すとき, (13.10)′ がたしかに成立していることがわかる〔注: ここでも $\det(\kappa_{rs}) \neq 0$ という条件を用いた〕.

公式(13.12)は次のようにして証明できる. まず $f^t(ab\,;c) = f^t(a\,;bc)$ を a^r, b^s で微分すると

$$\begin{aligned}&f_{pq}{}^t(ab\,;c) f^q{}_s(a\,;b) f_r{}^p(a\,;b) + f_p{}^t(ab\,;c) f_r{}^p{}_s(a\,;b) \\ &= f_r{}^t{}_p(a\,;bc) f_s{}^p(b\,;c).\end{aligned}$$

この式の a, b を 0 とおく．また公式

$$f^q{}_s(a;0)|_{a=0} = R(a)^q{}_s|_{a=0} = \delta^q{}_s$$

$$f_r{}^p(0;b)|_{b=0} = L(b)^p{}_r|_{b=0} = \delta^p{}_r$$

を用いると，上の式は次のようになる：

$$f_{rs}{}^t(0;c) + L(c)^t{}_p \cdot f_r{}^p{}_s(0;0) = L(c)^t{}_{r,p} L(c)^p{}_s.$$

この式の r と s を入れかえたものを，この式から引けば

$$L(c)^t{}_p\{f_r{}^p{}_s(0;0) - f_s{}^p{}_r(0;0)\} = L^t{}_{r,p}L^p{}_s - L^t{}_{s,p}L^p{}_r.$$

ここで $C_r{}^p{}_s$ の定義(B. 5)を使えば，公式(13. 12)が導かれる．

最後に(13. 6)の A, B がいずれも $(1, \cdots, 4)$ の場合を用いて X_{rs} を求めよう．いままで述べてきた方法とまったく同じことを用いて，まず $\xi^r{}_{,\mu}$ の係数の比較から

$$X_{rs} = \kappa_{rs} \tag{13. 13}$$

が容易に求まる．$\xi^r{}_{,\nu}$ の係数からも同じ結果が導かれることはいうまでもない．

この結果を用いると，両辺の ξ に比例する項も等しくなる．これで X, Y, Z はすべて予想通り，群 G の構造のみにより定められた関数であることがわかった．結局，G_{AB} は次のようになる：

$$G_{AB}(x,a) = \begin{pmatrix} G_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \alpha^2 A^r{}_\mu A_{r\nu}, & G_{\mu s} = \alpha^2 A^r{}_\mu L^{-1}(a)_{rs} \\ G_{r\nu} = \alpha^2 A^s{}_\nu L^{-1}(a)_{sr}, & G_{rs} = \alpha^2 L^{-1}(a)^p{}_r L^{-1}(a)_{ps} \end{pmatrix}. \tag{13. 14}$$

ここでラテン添字の上げ下ろしには $(\kappa^{-1})^{rs}, \kappa_{rs}$ を用いた．

(13. 14)は無限小ゲージ変換を用いて導かれたものである．しかし一般の変換(13. 2)に対しても(13. 14)の G_{AB} が共変テンソルとして変換されることを証明することは，それほど難しくはない．

G_{AB} と逆の関係にある G^{AB} は(13. 14)から容易に求められる．その結果は次の通りである：

$$G^{AB} = \begin{pmatrix} G^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}, & G^{\mu s} = -L(a)^s{}_t A^{t\mu} \\ G^{r\nu} = -L(a)^r{}_t A^{t\nu}, & G^{rs} = \dfrac{1}{\alpha^2} L^r{}_p L^{sp} + L^r{}_p L^s{}_q A^p{}_\mu A^{q\mu} \end{pmatrix}. \tag{13. 15}$$

ここでギリシャ添字の上げ下ろしには $g^{\mu\nu}, g_{\mu\nu}$ を用いた．

13.2　接続係数および曲率テンソル

(13.14), (13.15) から空間 R_{4+n} における接続係数 $*\Gamma^A{}_{BC}$ を求めるには，相対論で周知の手順に従えばよい．(13.14) に与えられた G_{AB} が，特殊な形をした変換(13.2) に対して共変テンソルであることを考えれば，これから導かれる $*\Gamma$ を使って共変微分 $*\nabla_A$ を定義した場合，少なくとも変換(13.2) に対しては，$*\nabla_A$ がたしかに共変性をもつことは容易に理解できるであろう．なお今後，R_{4+n} 空間の量には左肩に＊印をつける．また $g_{\mu\nu}$ から作られる 4 次元 x-空間の接続係数は従来通り $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}$ のように表わす．添字の上げ下ろしはすでに (13.14), (13.15) に対して述べた約束をそのまま使う．

R_{4+n} の中の点 $u^A=(x^\mu, a^r)$ における $*\Gamma^A{}_{BC}$ は次のようになる．

$$\left.\begin{aligned}
*\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} &= \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}+\frac{\alpha^2}{2}g^{\lambda\rho}\{A^s{}_\mu F_{s\nu\rho}+A^s{}_\nu F_{s\mu\rho}\},\\
*\Gamma^r{}_{\mu\nu} &= L^r{}_s\left\{-A^s{}_\lambda *\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}+\frac{1}{2}(A^s{}_{\mu,\nu}+A^s{}_{\nu,\mu})\right\},\\
*\Gamma^\lambda{}_{\mu s} &= \frac{\alpha^2}{2}g^{\lambda\nu}F_{r\mu\nu}(L^{-1})^r{}_s,\\
*\Gamma^r{}_{\mu s} &= \frac{1}{2}L^r{}_p(A^t{}_\mu C_t{}^p{}_q-\alpha^2 A^{p\lambda}F_{q\mu\lambda})(L^{-1})^q{}_s,\\
*\Gamma^\lambda{}_{rs} &= 0,\\
*\Gamma^t{}_{rs} &= \frac{1}{2}L^t{}_p\{(L^{-1})^p{}_{r,s}+(L^{-1})^p{}_{s,r}\}.
\end{aligned}\right\}\qquad(13.16)$$

ここで L, L^{-1} は点 a における値を示し，g, Γ, A, F はすべて x のみの関数である．

なお，(13.16) に与えられた $*\Gamma$ のディメンションは

$$[*\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}]=[\mathrm{L}]^{-1},\qquad [*\Gamma^r{}_{\mu\nu}]=[\mathrm{L}]^{-2},\qquad [*\Gamma^r{}_{\mu s}]=[\mathrm{L}]^{-1},$$

その他はすべて無次元である．

これらの $*\Gamma$ を Kaluza の ${}^5\Gamma$ の定義(4.13) と比べると，両者が酷似していることがわかる．

$g_{\mu\nu}$, $A^r{}_\mu$ のみたすべき方程式を Hamilton の原理から導くためには，まず $*\Gamma$ を用いてスカラー曲率

$$*R \overset{d}{\equiv} *R_{AB}G^{AB}$$

を求める必要がある．ところで求めるべき量がスカラーであるということは，まことに好都合である．その理由は以下の通りである．

スカラー量は変換(13.2)に対してその値が不変である．そこでまず，x-変換を行なって，1点xにおける測地系を用意する．つまり特別な点xで$g_{\alpha\beta,\mu}=0$，$\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}=0$となるような座標系を設置する．次に，ゲージ変換により点xで$A^{r}{}_{\mu}$も0にさせる．最後に，$A^{r}{}_{\mu}(x)=0$という条件を保持したまま，xに依存しない$b\in M$を用いて，Mの中の点移動(ゲージ変換)を行ない，R_{4+n}の中の点(x, a)を他の特別な点P{その座標は$(x, a=0)$}に移す．このような種々の変換をしても$*R$の値はもちろん，不変である．なお，このような特別な座標系，ゲージ条件を用いた場合の量をすべて，その頭の上に$^{-}$を付けて表わすことにする．またLやL^{-1}はすべて$a=0$における値を用いればよい．そこで計算に必要な準備をしよう．

まず(10.26)，(10.26)′から

$$L^{-1}(\xi)^{r}{}_{s}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}(\boldsymbol{\xi}^{n})^{r}{}_{s}, \qquad (\boldsymbol{\xi})^{r}{}_{s}\overset{d}{\equiv}\xi^{t}C_{t}{}^{r}{}_{s}. \tag{13.17}$$

そこでξ^{t}のかわりにa^{t}とおけば

$$L^{-1}(a)^{r}{}_{s}=\delta^{r}{}_{s}+\frac{1}{2!}a^{i}C_{i}{}^{r}{}_{s}+\frac{1}{3!}a^{i}a^{j}C_{i}{}^{r}{}_{t}C_{j}{}^{t}{}_{s}+\cdots. \tag{13.17$'$}$$

これを使うと

$$\left.\begin{aligned}&L^{-1}(0)^{r}{}_{s}=\delta^{r}{}_{s}, \qquad L^{-1}(0)^{r}{}_{s,t}=-\frac{1}{2}C_{s}{}^{r}{}_{t},\\ &L^{-1}(0)^{r}{}_{s,pq}=\frac{1}{6}(C_{p}{}^{r}{}_{t}C_{q}{}^{t}{}_{s}+C_{q}{}^{r}{}_{t}C_{p}{}^{t}{}_{s}).\end{aligned}\right\} \tag{13.18}$$

さらに

$$L^{r}{}_{s,p}=-L^{r}{}_{u}(L^{-1})^{u}{}_{v,p}L^{v}{}_{s}$$

という関係を使うと次の結果が求まる：

$$L(0)^{r}{}_{s}=\delta^{r}{}_{s}, \qquad L(0)^{r}{}_{s,t}=\frac{1}{2}C_{s}{}^{r}{}_{t}. \tag{13.19}$$

なお上述のような特別な$\bar{x}$-系では，$\bar{\Gamma}^{\lambda}{}_{\mu\nu}$や$\bar{A}^{r}{}_{\mu}$自身はすべて0としてよいが，$\partial\bar{\Gamma}/\partial\bar{x}$や$\partial\bar{A}/\partial\bar{x}$を0とするわけにはいかない．

以上の注意を考慮すると計算はきわめて容易となる．結果は次の通りである：

$$\left.\begin{aligned}{}^*\bar{R}_{\mu\nu} &= \bar{R}_{\mu\nu}+\frac{\alpha^2}{2}\bar{g}^{\alpha\beta}\bar{F}_{s\mu\alpha}\bar{F}^{s}{}_{\nu\beta},\\ {}^*\bar{R}_{\mu s} &= -\frac{\alpha^2}{2}\bar{g}^{\lambda\rho}\bar{\nabla}_\lambda\bar{F}_{s\mu\rho},\\ {}^*\bar{R}_{rs} &= -\frac{1}{4}\kappa_{rs}-\frac{\alpha^4}{4}\bar{F}_r{}^{\mu\nu}\bar{F}_{s\mu\nu}.\end{aligned}\right\} \tag{13.20}$$

ここでは次のような記号を用いた：

$$\left.\begin{aligned}&\bar{F}^r{}_{\mu\nu}=\bar{\partial}_\mu\bar{A}^r{}_\nu-\bar{\partial}_\nu\bar{A}^r{}_\mu, \qquad \bar{\nabla}_\lambda\bar{F}_{s\mu\rho}=\bar{\partial}_\lambda\bar{F}_{s\mu\rho}\\ &\bar{R}_{\mu\nu}=\bar{\partial}_\mu\bar{\Gamma}^\lambda{}_{\nu\lambda}-\bar{\partial}_\lambda\bar{\Gamma}^\lambda{}_{\mu\nu}.\end{aligned}\right\} \tag{13.21}$$

(13.20)から

$$\begin{aligned}{}^*R(x,a) &= {}^*\bar{R}(x,a=0)\\ &= \bar{R}+\frac{\alpha^2}{4}\bar{F}^{s\mu\nu}\bar{F}_{s\mu\nu}-\frac{n}{4\alpha^2}.\end{aligned} \tag{13.22}$$

$\bar{R}$ は4次元 Riemann 空間のスカラー曲率（を $\bar{x}$-系を用いて表わしたもの）を示す．

もし群 G が可換群のときは $C_s{}^r{}_t=0$ となるから，(13.22)の最後の項は出てこない．なお(13.22)は予想通り，Kaluza の ${}^5R$ とまったく同じ形をしている．

(13.22)の右辺の各項はいずれもそれ自身が変換(13.2)に対して不変である．また左辺の ${}^*R$ も同様に不変である．したがって，(13.22)という等式は $\bar{x}$-系のような特別な場合でなくとも成立する．また任意の点 $a(\neq 0)$ でも，もちろん，この等式はなり立つ．例として(13.22)の $\bar{F}\bar{F}$ の変換を考えてみよう．

任意の $b(x)\in M$ によるゲージ変換を行なえば，今まで0であった $A^r{}_\mu$ は姿を現わす．いま群 G の生成元 G_r の随伴表現行列［(B.18)，あるいは(10.23)，(10.24)参照］

$$\mathrm{ad}(G_r)^p{}_q \overset{d}{\equiv} ((\boldsymbol{C}_r)^p{}_q \overset{d}{\equiv} C_r{}^p{}_q, \qquad \mathrm{Ad}(b)\overset{d}{\equiv}\exp\{b^r\boldsymbol{C}_r\}$$

を用いて，n 次の正方行列

$$\boldsymbol{A}_\mu(x)\overset{d}{\equiv} A^r{}_\mu\boldsymbol{C}_r \qquad \boldsymbol{F}_{\mu\nu}\overset{d}{\equiv} F^r{}_{\mu\nu}\boldsymbol{C}_r$$

を考えよう．これを使うと b によるゲージ変換で $\bar{\boldsymbol{A}}_\mu$ は

$$\bar{\boldsymbol{A}}_\mu(x)=0\to\boldsymbol{A}_\mu\overset{d}{\equiv}\mathrm{Ad}(b)\cdot\bar{\boldsymbol{A}}_\mu\cdot\mathrm{Ad}^{-1}(b)-\bar{\partial}_\mu\{\mathrm{Ad}(b)\}\cdot\mathrm{Ad}^{-1}(b)$$

$$= -\bar{\partial}_\mu\{\mathrm{Ad}(b)\}\cdot\mathrm{Ad}^{-1}(b)$$

となる．これに伴って $\bar{\boldsymbol{F}}_{\mu\nu}$ も次のように変換される：

$$\bar{\boldsymbol{F}}_{\mu\nu} \to \boldsymbol{F}_{\mu\nu} = \mathrm{Ad}(b)\bar{\boldsymbol{F}}_{\mu\nu}\mathrm{Ad}^{-1}(b) = \bar{\partial}_\mu \boldsymbol{A}_\nu - \bar{\partial}_\nu \boldsymbol{A}_\mu + [\boldsymbol{A}_\mu, \boldsymbol{A}_\nu].$$

したがって $\kappa_{rs} = -C_r{}^a{}_b C_s{}^b{}_a$ を思い起こすと

$$\bar{F}^{s\mu\nu}\bar{F}_{s\mu\nu} = -\mathrm{Tr}(\bar{\boldsymbol{F}}^{\mu\nu}\bar{\boldsymbol{F}}_{\mu\nu}) = -\mathrm{Tr}(\boldsymbol{F}^{\mu\nu}\boldsymbol{F}_{\mu\nu}) = F^{s\mu\nu}F_{s\mu\nu}.$$

なお x-変換を行なえば，$\bar{R}$ は一般座標系を用いた R に書きかえられることはいうまでもない．かくして(13.22)は次のように書きかえられる：

$$*R(x,a) = R(x) + \frac{\alpha^2}{4}F^{s\mu\nu}(x)\cdot F_{s\mu\nu}(x) - \frac{n}{4\alpha^2}. \qquad (13.22)'$$

ここで注目すべきことは，(13.22)′ の右辺が示すように，$*R(x,a)$ が a には無関係ということである*⁾.

重力場とゲージ場の作用積分 I を求めるには，R_{4+n} 空間の不変体積要素

$$\sqrt{|\det(G_{AB})|}\,d^4x\cdot d^na$$

を計算しなければならない．$\det(G_{AB})$ は

$$\det(G_{AB}) = \det(g_{\mu\nu})\cdot\det\left\{\kappa_{pq}(L^{-1})^p{}_r(L^{-1})^q{}_s\right\}\cdot\alpha^{2n}$$

のように，x-空間に関する行列式と，M に属するそれとの積に分かれる．さらに後者は

$$\alpha^{2n}\det(\kappa_{pq})\{\det(L^r{}_s)\}^{-2}$$

となる．そこで M に関係する部分は，付録の (B.36) に与えられた

$$dv_L \overset{d}{\equiv} \sqrt{\det(\kappa_{pq})}\alpha^n[\det\{L(a)^r{}_s\}]^{-1}d^na \qquad (B.36)$$

と同じものになる．

群 G がコンパクトのときは M の体積は有限だから，a に関する積分は容易に計算できて($*R$ が a に無関係だから)，

$$I = \mathrm{const.}\int *R(x)\sqrt{-g(x)}\,d^4x\cdot\int_M dv_L(a)$$

$$= \mathrm{const.}'\int\left\{R(x) + \frac{\alpha^2}{4}F_{s\mu\nu}F^{s\mu\nu} - \frac{n}{4\alpha^2}\right\}\sqrt{-g}\,d^4x$$

となる．

---

*⁾ $*R$ の中には $L(a)^r{}_s$ や $L^{-1}(a)^r{}_s$ といった，群 G の構造に関係する a の関数がまったくでてこない．その結果 $*R$ は a に無関係となる．

ここでEinsteinの宇宙項によく似たものがでてきたが，おしいことに符号がEinsteinのそれとは反対である．これをこのまま残すことは不都合を生ずるから，消去しなければならないが，$\alpha\to\infty$ とすることもできない．これを消去するには，さらにEinsteinの宇宙項と同じような＋の定数項を追加して，この好ましからざる項を相殺しなければならない．

13.3　R_{4+n} 空間のベクトル場

物質場との相互作用を扱うために，物質場の一例として，R_{4+n} 空間の中のベクトル場 $\Phi^A(x,a)=\Phi^A(u)\,(A=1,2,\cdots,4+n)$ を考えてみよう．

$g_{\mu\nu}(x)$ と $A^r{}_\mu(x)$ を，$G_{AB}(u)$ を用いて統一的に表わしたように，4次元時空のベクトル $\psi^\mu(x)$ と，群 G の随伴表現により変換される n 次元ベクトル $\phi^r(x)$ を，$n+4$ 次元のベクトル $\Phi^A(u)$ を用いて統一的に書き表わすことがわれわれの目的である．

そこで出発点とすべき前提は，x の関数 $\psi^\mu(x)$ および $\phi^r(x)$ が，変換(13.2)に対して

$$\left.\begin{aligned}\psi^\mu(x)\to\psi'^\mu(x')&=\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\psi^\nu(x)\\ \phi^r(x)\to\phi'^r(x')&=\mathrm{Ad}\{b(x)\}^r{}_s\cdot\phi^s(x)\end{aligned}\right\}\qquad(13.23)$$

という変換則に従うということである．

いま，$A=(1,\cdots,4)$ の場合に $\Phi^A(u)$ を $\Phi^\mu(u)$ と書くことにして，まず

$$\Phi^\mu(x,a)\overset{d}{\equiv}c_1(a)\psi^\mu(x)+c_2(a)\phi_r(x)A^{r\mu}(x)\qquad(13.24)$$

とおく．$c_1(a), c_2(a)$ は a の未知関数とする．これを決定することがわれわれの課題である．

ところで，G_{AB} の定義の中に出てきた X, Y, Z と同様に，c_1, c_2 も群 G の構造だけにより定められた関数とする．したがってこれらを調べるにはゲージ変換に対する Φ の振舞いを調べれば十分である．

ゲージ変換

$$\begin{aligned}a^r\to a'^r&=f^r\{b(x);a\}\\ x&=\text{変換しない}\end{aligned}\qquad(13.25)$$

に対して，Φ^A の変換則

$$\Phi'^A(u') = \frac{\partial u'^A}{\partial u^B}\Phi^B(u) \tag{13.26}$$

から，次の等式が導かれる：

$$\Phi'^\mu(x, a') = \Phi^\mu(x, a). \tag{13.27}$$

この左辺は

$$\Phi'^\mu(x, a') \stackrel{d}{\equiv} c_1(a')\psi^\mu(x) + c_2(a')\phi'_r(x)A'^{r\mu}(x) \tag{13.28}$$

である．ここで注意すべき点は，X, Y, Z の議論の際に述べたように，c_1, c_2 も点の移動 $a \to a'$ に対しては，その関数形には変更はないということである．

(13.28) の右辺の ϕ'_r は (13.23) に対応して

$$\phi'_r(x) = \phi_s(x)\cdot \mathrm{Ad}^{-1}(b)^s{}_r. \tag{13.23$'$}$$

また $A'^{r\mu}$ は (13.4) に与えられている．これらを使うと (13.27) からただちに

$$c_1(a') = c_1(a), \qquad c_2(a) = 0$$

が導かれる．すなわち c_1 は定数であるから $c_1=1$ としてかまわない．結局次の定義に到達する：

$$\Phi^\mu(u) = \psi^\mu(x). \tag{13.29}$$

次に $A=(5, \cdots, n+4)$ の場合の Φ^A を Φ^r $(r=1, \cdots, n)$ と書くことにして，それを ϕ^r や ψ^μ を用いて書き表わしてみよう．しかしここではまず Φ_r をとり上げよう．

いま，

$$\Phi_r(x, a) \stackrel{d}{\equiv} \phi_s(x)\cdot C(a)^s{}_r + \psi^\mu(x)A_{s\mu}(x)D(a)^s{}_r \tag{13.30}$$

とおく．C, D も，群 G の構造だけにより定められた形をもつ a の未知関数とする．この Φ_r が共変ベクトルの変換則

$$\Phi_A(u) \to \Phi'_A(u') = \frac{\partial u^B}{\partial u'^A}\Phi_B(u) \tag{13.31}$$

に従うためには $C(a), D(a)$ がどのような関数であればよいかを調べてみよう．

ゲージ変換 (13.25) に対して，(13.31) から

$$\begin{aligned}\Phi'_r(x, a') &= \frac{\partial}{\partial a'^r}f^s(b^{-1}; a')\Phi_s(x, a)\\ &= \Phi_s(x, a)f^s{}_r(b^{-1}; a')\end{aligned} \tag{13.32}$$

となる．この左辺は次のようなものである：

$$\Phi'_r(x, a') \overset{d}{\equiv} \phi'_s(x)C(a')^s{}_r + \psi^\mu(x)A'_{s\mu}(x)D(a')^s{}_r. \qquad (13.33)$$

(13.32)に(13.33)を代入し，さらにϕ'_s, $A'_{s\mu}$の定義を使うと，$\partial b(x)/\partial x^\mu$に比例する項の比較からただちに

$$D(a)^s{}_r = 0$$

が導かれる．またϕ_sに比例する項からは

$$\mathrm{Ad}^{-1}(b)^t{}_s C(a')^s{}_r = C(a)^t{}_s f^s{}_r(b^{-1}; a')$$

がでてくる．ここで特に$b=a'$とおけば$a^r = f^r(a'^{-1}; a') = 0$となるから，上の等式は

$$\mathrm{Ad}^{-1}(a')^t{}_s \cdot C(a')^s{}_r = C(0)^t{}_s \cdot R^{-1}(a')^s{}_r$$

となる．

ところで，群Gの構造からきまるn次の行列で，定数の要素をもつ$C(0)^t{}_s$としては

$$C(0)^t{}_s = \text{const. } \delta^t{}_s$$

しかない．これを使うと

$$\begin{aligned} C(a')^s{}_r &= \text{const. } \mathrm{Ad}(a')^s{}_t \cdot R^{-1}(a')^t{}_r \\ &= \text{const. } L^{-1}(a')^s{}_r. \end{aligned}$$

いまϕ^rとψ^μのディメンションを同一にするためにconst.をαとおけば，

$$C(a)^s{}_r = \alpha L^{-1}(a)^s{}_r. \qquad (13.34)$$

(13.34)は，さきに$C(0)^t{}_s = \text{const. } \delta^t{}_s$としたことと，まさに合致している．以上の結果を使うと$\Phi_r(u)$は

$$\Phi_r(x, a) = \alpha\phi_s(x)L^{-1}(a)^s{}_r \qquad (13.30)'$$

となる．

(13.29), (13.30)′からΦ_μ, Φ^rを導くことは容易である．

まず

$$\Phi^\mu = G^{\mu\nu}\Phi_\nu + G^{\mu r}\Phi_r.$$

これに(13.15)のG^{AB}の定義を代入すると

$$\psi^\mu(x) = g^{\mu\nu}\Phi_\nu(u) - \alpha\phi_s L^{-1}(a)^s{}_r \cdot L(a)^r{}_t \cdot A^{t\mu}.$$

そこで，両辺に$g_{\lambda\mu}$をかけると

$$\Phi_\lambda(u) = \psi_\lambda(x) + \alpha\phi_s(x)A^s{}_\lambda(x). \qquad (13.35)$$

Φ^rを求めるには

$$\Phi_r = G_{rs}\Phi^s + G_{r\mu}\Phi^\mu$$

に，G_{AB} の定義(13.14)を代入し，さらに(13.29),(13.30)′ を使って，次のように書き表わす:

$$\alpha\phi_s L^{-1}(a)^s{}_r = \alpha^2(L^{-1})^p{}_r(L^{-1})_{ps}\Phi^s(u) + \alpha^2\psi^\mu A^s{}_\mu L^{-1}(a)_{sr}.$$

この両辺に $\alpha^{-2}(L)^t{}_q(L)^{rq}$ をかけると

$$\Phi^t(u) = \frac{1}{\alpha}L(a)^t{}_s\{\phi^s(x) - \alpha A^s{}_\mu(x)\psi^\mu(x)\} \tag{13.36}$$

が導かれる．

ここに Φ_A, Φ^A をもう一度，書きならべよう:

$$\Phi^\mu(x) = \psi^\mu(x), \tag{13.29}$$

$$\Phi^r(x, a) = \frac{1}{\alpha}L(a)^r{}_s\{\phi^s(x) - \alpha A^s{}_\mu(x)\psi^\mu(x)\}, \tag{13.36}$$

$$\Phi_\mu(x) = \psi_\mu(x) + \alpha\phi_s(x)A^s{}_\mu(x), \tag{13.35}$$

$$\Phi_r(x, a) = \alpha\phi_s(x)L^{-1}(a)^s{}_r. \tag{13.30$'$}$$

これらを使うと

$$\Phi_A\Phi^A = \psi_\mu(x)\psi^\mu(x) + \phi_r(x)\phi^r(x). \tag{13.37}$$

$^*R$ が a に無関係であったと同様に，スカラー $\Phi_A\Phi^A$ も a に無関係である．この特性はスカラーがゲージ変換 $a\to a'$ に対してその値を変えないということに由来するものである．

最後に Φ 場の方程式を Hamilton の原理を用いて導くために，まず u-変換(13.2)に対して不変な Lagrange 関数 L_Φ として，次のようなものを考える:

$$L_\Phi \overset{d}{\equiv} -\frac{1}{2}\{{}^*\nabla_A\Phi_D \cdot {}^*\nabla^A\Phi^D + M^2\Phi_A\Phi^A\}. \tag{13.38}$$

これを ϕ_r, ψ^μ を使って書きかえてみよう．その際，共変微分 ${}^*\nabla_A\Phi_B$ という面倒な量を計算しなくてはならない．しかし幸いにして L_Φ はスカラー量だから，$^*R$ の計算の際に述べた理由と同じ考えから，$\bar{A}=0, \bar{\Gamma}=0$ というゲージ条件と座標系を用い，点 $(\bar{x}, a=0)$ において L_Φ を計算してみよう．

その前に ${}^*\bar{\Gamma}(\bar{x}, a=0)$ を求めておこう．0 でないものは

$$\left.\begin{aligned} {}^*\bar{\Gamma}^r{}_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\bar{A}^r{}_{\mu,\nu}+\bar{A}^r{}_{\nu,\mu}), \\ {}^*\bar{\Gamma}^\lambda{}_{\mu s} &= \frac{\alpha^2}{2}\bar{g}^{\lambda\nu}\bar{F}_{s\mu\nu} \end{aligned}\right\} \tag{13.39}$$

だけである．

そこで，共変微分はつぎのようになる：

$$\left.\begin{aligned} {}^*\bar{\nabla}_\mu\bar{\Phi}_\rho &= \bar{\partial}_\mu\bar{\phi}_\rho+\frac{\alpha}{2}\bar{\phi}_r\bar{F}^r{}_{\mu\rho}, \\ {}^*\bar{\nabla}_r\bar{\Phi}_\rho &= -\frac{\alpha^2}{2}\bar{F}_{r\rho\nu}\bar{\phi}^\nu, \\ {}^*\bar{\nabla}_\mu\Phi_s &= \alpha\{\bar{\partial}_\mu\bar{\phi}_s-\frac{\alpha}{2}\bar{F}_{s\mu\nu}\bar{\phi}^\nu\}, \\ {}^*\bar{\nabla}_r\bar{\Phi}_s &= \frac{\alpha}{2}C_r{}^t{}_s\bar{\phi}_t(x). \end{aligned}\right\} \tag{13.40}$$

これを用いると，$\bar{x}$–系を用い，また特別なゲージ条件のもとでの $\bar{L}_\Phi$ が求まる．しかしすでに述べたように(13.2)という変換に対して $\bar{L}_\Phi$ が不変であることから任意の系を用いた場合の L_Φ が容易に導かれる．結果は次の通りである：

$$\begin{aligned} L_\Phi = -\frac{1}{2}\Big[&\nabla_\mu\phi_\nu\nabla^\mu\phi^\nu+M^2\phi_\nu\phi^\nu+\nabla_\mu\phi_r\nabla^\mu\phi^r \\ &+\{M^2+(2\alpha)^{-2}\}\phi_r\phi^r+\alpha\phi_rF^{r\mu\nu}\nabla_\mu\phi_\nu-\alpha F^{r\mu\nu}\phi_\nu\cdot\nabla_\mu\phi_r \\ &+\frac{\alpha^2}{4}\phi_r\phi_sF^{r\mu\nu}F^s{}_{\mu\nu}+\frac{\alpha^2}{2}\phi_\rho\phi^\sigma F^{r\mu\rho}F_{r\mu\sigma}\Big] \end{aligned} \tag{13.38$'$}$$

この L_Φ も a にはまったく無関係である．

(13.38)′ の右辺は，すべて頭の上に−の付いた量を用いて導かれたものである．それをゲージ変換によって，その形を変えないまま，一般の場合に書きかえたものが(13.38)′ である．(13.38)′ の右辺の第3項を例にとって，この手順を説明してみよう．

まず $b(x)\in M$ によるゲージ変換を行なうと $\bar{\phi}^r$

$$\bar{\phi}^r(x)\to\phi^r(x)\overset{d}{\equiv}\mathrm{Ad}(b)^r{}_s\bar{\phi}^s(x)$$

に変わる．これに応じて $\bar{\nabla}_\mu\bar{\phi}^r$ は次のように変換される：

$$\bar{\nabla}_\mu\bar{\phi}^r \overset{d}{\equiv} \bar{\partial}_\mu\bar{\phi}^r \to \mathrm{Ad}(b)^r{}_s\partial_\mu\bar{\phi}^s$$
$$= \bar{\partial}_\mu\phi^r - \bar{\partial}_\mu\{\mathrm{Ad}(b)^r{}_s\}\cdot\bar{\phi}^s$$
$$= \bar{\partial}_\mu\phi^r - [\bar{\partial}_\mu\{\mathrm{Ad}(b)\}\cdot\mathrm{Ad}^{-1}(b)]^r{}_s\phi^s.$$

これに p. 173 の 1 行目の $\boldsymbol{A}_\mu$ の定義を用い，さらに変換 $\bar{x}\to x$ を行なうと，上の式はつぎのようになる：

$$\partial_\mu\phi^r + \boldsymbol{A}_\mu(x)^r{}_s\cdot\phi^s \overset{d}{\equiv} \nabla_\mu\phi^r.$$

まったく同様にして $\bar{\phi}_r, \bar{\nabla}_\mu\bar{\phi}_r$ はそれぞれ次のものに変わる：

$$\bar{\phi}_s\mathrm{Ad}^{-1}(b)^s{}_r = \phi_r, \qquad \partial_\mu\bar{\phi}_s\cdot\mathrm{Ad}^{-1}(b)^s{}_r = \partial_\mu\phi_r - \phi_s(\boldsymbol{A}_\mu)^s{}_r \overset{d}{\equiv} \nabla_\mu\phi_r.$$

そこで

$$g^{\mu\nu}\bar{\nabla}_\mu\bar{\phi}_r\cdot\bar{\nabla}_\nu\bar{\phi}^r = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\phi_r\cdot\nabla_\nu\phi^r = \nabla_\mu\phi_r\cdot\nabla^\mu\phi^r.$$

(13. 38)′ の右辺の他の項についても，その項の形を変えないで，頭の上の－を除去できることが容易にわかるであろう．

(13. 38)′ の φ^μ を 0 とおき，ϕ^r に Higgs 場の役割を担わせることもできる．それには (13. 38)′ にさらに

$$\frac{1}{2}(c_1)^2\phi_r\phi^r - \frac{1}{2}(c_2)^2(\phi_r\phi^r)^2$$

という項を追加すればよい．ϕ_r が Higgs 場の効果を発揮するためには定数 c_1 は

$$(c_1)^2 > M^2 + (2\alpha)^{-2}$$

という条件をみたす必要がある．

(13. 38)′ から作られる作用積分

$$I_\phi = \int L_\phi\sqrt{|\det(G_{AB})|}\,d^4x\,d^na$$

の $\varphi^\mu(x), \phi^r(x)$ に対する変分を求めれば，それぞれの場に対する場の方程式が求まる．それらについては，これ以上は立ち入らないことにする．

さて (13. 38)′ の右辺の形は，$(4+n)$ 次元の座標変換に対する不変性をもつ Lagrange 関数を，(13. 2) のような制限された変換に対してのみ不変な形式に書きなおしたものである．そのおかげで，われわれに理解しやすい形式になったが，反面，x-空間と，群多様体 M を完全に融合した $(4+n)$ 次元統一理論のみが教えることのできる，われわれにとっては未知の情報を棄ててしまったこ

となる．

近年，Kaluza 型の統一理論が復活し，さらに弦理論の応援を得て，近代的な$(4+n)$次元統一理論が脚光を浴びている．このようなアプローチにより，4種の基本的な相互作用の統一的記述，すなわち超統一理論を創りあげることは，今や理論物理学者にとって最も興味ある課題である[15]．本書が，この大問題に挑戦しようとする若い俊秀の勉学に役立つならば，著者にとっては，この上もない喜びである．

本書では，量子化の問題には一切ふれなかった．これについては，参考文献にあげた書物を参照されるようすすめる．

付録

A　荷電粒子の運動方程式

Weylの統一場理論における荷電粒子の運動方程式を求めてみよう．本文でも述べたように，この理論では，最短コースを粒子の軌道とみなすというような要請は役にたたない．そこで，エネルギー・運動量の保存則や電荷の保存則から，運動方程式を導くことにする．

Weylのそもそものねらいである，重力場および電磁場だけからすべての物質粒子の存在や，その運動を導くという大構想はあきらめて，$g_{\mu\nu}$, A_μ の他に，荷電粒子の場 φ_A $(A=1, \cdots, N)$ を出発点にとる．ただし φ_A については具体的に，どんな性格の場であるかは言及する必要はない．

第II編で述べたように，理論が，一般座標変換に対して不変であるという要請から，物質場のエネルギー・テンソル密度 $\mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^{\mu\nu}$ は保存則

$$\partial_\mu \mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^{\mu\nu} - A_\mu \mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^{\mu\nu} + {}^*\Gamma^\nu{}_{\mu\rho} \mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^{\mu\rho} = -f^\nu{}_\mu \mathcal{J}_{\mathrm{M}}{}^\mu \tag{A. 1}$$

をみたす．これは本文の(3. 31)である．$\mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^{\mu\nu}$, $\mathcal{J}_{\mathrm{M}}{}^\mu$ は，いずれも第3章 p. 42 にその定義が与えられている．

一方，ゲージ不変の要請から，φ_A の作る電流ベクトル密度 $\mathcal{J}_{\mathrm{M}}{}^\mu$ は

$$\partial_\mu \mathcal{J}_{\mathrm{M}}{}^\mu = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^{\mu\nu} \tag{A. 2}$$

という保存則を満足する[これは本文の(3. 30)である]．ここで，$\mathcal{T}_{\mathrm{M}}{}^{\mu\nu}$ は -1 次のゲージ可変量，$\mathcal{J}_{\mathrm{M}}{}^\mu$ はゲージ不変量である．

さて，物質場を N 個の荷電粒子の砂塵状の集団と考え，各粒子の運動方程式を(A. 1), (A. 2)から導いてみよう．

まず，第 k 番目の粒子を代表にとり，その座標を $z^\mu(\tau_k)$ あるいは略して $z^\mu(k)$ とかく．またその質量を $m(k)$，電荷を $e(k)$ とする．τ_k は第 k 粒子の軌道を表わすためのパラメーターで，これは座標変換に対しては不変，ゲージ変換に対しては a 次の可変量とする．

砂塵のもつエネルギーや電荷は点状に局在しているから

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{T}_\mathrm{M}{}^{\mu\nu}(x)&=\sum_{k=1}^{N}\int M^{\mu\nu}(\tau_k)\delta^4\{x-z(k)\}d\tau_k\\ \mathcal{J}_\mathrm{M}{}^{\mu}(x)&=\sum_{k=1}^{N}\int J^{\mu}(\tau_k)\delta^4\{x-z(k)\}d\tau_k\end{aligned}\right\}\tag{A. 3}$$

とおく．

ゲージ変換に対する $\mathcal{T}_\mathrm{M}{}^{\mu\nu}$, $\mathcal{J}_\mathrm{M}{}^{\mu}$ の変換性から，$M^{\mu\nu}$ は $-(1+a)$ 次，J^μ は $-a$ 次のゲージ可変量である．

ここで時刻 x^0 に，第 k 番目の粒子に着目し，この粒子だけを包む小さな空間的領域を V_k とする．(A. 2)に(A. 3)を代入し，両辺に $\vec{x}=(x^1, x^2, x^3)$ だけに依存する任意の関数 $f(\vec{x})$ をかけ，V_k の内部にわたり空間積分を行なう．

いま，面倒だから，k という添字は省略する．また $\dot{z}^0$ は $dz^0/d\tau$ を表わすとすると，(A. 2)の左辺は

$$\begin{aligned}&\int_V J^0(\tau)f(\vec{x})\delta\{\vec{x}-\vec{z}(\tau)\}\frac{\partial}{\partial x^0}\delta\{x^0-z^0(\tau)\}\frac{1}{\dot{z}^0}dz^0d^3x\\ &\qquad+\int_V\sum_{l=1}^{3}J^l(\tau)f(\vec{x})\frac{\partial}{\partial x^l}\delta\{\vec{x}-\vec{z}(\tau)\}\cdot\delta\{x^0-z^0(\tau)\}\frac{1}{\dot{z}^0}dz^0d^3x\\ &\qquad=\frac{1}{\dot{z}^0(\tau)}\frac{d}{d\tau}[J^0(\tau)f\{\vec{z}(\tau)\}/\dot{z}^0]_{\tau=\tau_0}-\sum_{l=1}^{3}\left[J^l(\tau)\frac{\partial f(\vec{z})}{\partial z^l}/\dot{z}^0(\tau)\right]_{\tau=\tau_0}.\end{aligned}$$

ここで，τ_0 とは $x^0=z^0(\tau_0)$ を満足する τ の値である．

上の第1項はさらに書きなおすことができて，(A. 2)の右辺とまとめると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\dot{z}^0}\left[\frac{d}{d\tau}(J^0(\tau)/\dot{z}^0)-\frac{1}{2}M^{\mu\nu}(\tau)g_{\mu\nu}\{z(\tau)\}\right]f(\vec{z})\Big|_{\tau=\tau_0}\\ &\qquad+\sum_{l=1}^{3}\frac{1}{\dot{z}^0}\left[\{J^0(\tau)\dot{z}^l(\tau)/\dot{z}^0\}-J^l(\tau)\right]\frac{\partial f(\vec{z})}{\partial z^l}\Big|_{\tau=\tau_0}=0.\end{aligned}\tag{A. 4}$$

$f(z), \partial f(z)/\partial z^l$ はまったく任意にとりうるから，それぞれの項が独立に 0 でなければならない.

いま τ の関数 $e(\tau)$ を

$$J^0(\tau) \overset{d}{\equiv} e(\tau)\dot{z}^0(\tau) \tag{A. 5}$$

と定義すれば，(A. 4) の第 1 項から

$$\frac{de(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} M^{\mu\nu}(\tau). \tag{A. 6}$$

また第 2 項からは

$$J^l(\tau) = e(\tau)\cdot \dot{z}^l(\tau), \qquad (l=1,2,3).$$

これと (A. 5) をまとめると

$$J^\mu(\tau) = e(\tau)\dot{z}^\mu \tag{A. 5$'$}$$

となる.

次に (A. 1) に対しても $f(\vec{x})$ をかけ，第 k 粒子だけを包む空間域 V_k の中で空間積分を行なうと

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^{3} \frac{\partial f(\vec{z})}{\partial z^l}\{M^{0\nu}(\tau)(\dot{z}^l/\dot{z}^0) - M^{l\nu}(\tau)\}/\dot{z}^0\Big|_{\tau=\tau_0} \\ &\quad + \{f(\vec{z})/\dot{z}^0\}\Big[\frac{d}{d\tau}\{M^{0\nu}(\tau)/\dot{z}^0\} - A_\mu(z)M^{\mu\nu}(\tau) \\ &\quad + {}^*\Gamma^\nu{}_{\mu\rho}(z)M^{\mu\rho}(\tau) + f^\nu{}_\mu(z)J^\mu(\tau)\Big]\Big|_{\tau=\tau_0} \\ &= 0.\end{aligned} \tag{A. 7}$$

そこで，$\partial f/\partial z^l$ の係数から，$\nu=0$ とおくと

$$M^{00}\dot{z}^l/\dot{z}^0 = M^{l0}, \qquad (l=1,2,3).$$

いま $m(\tau)$ の定義を

$$M^{00}(\tau) = -m(\tau)\dot{z}^0\dot{z}^0 \tag{A. 8}$$

とすれば，上の式から

$$M^{l0} = M^{0l} = -m(\tau)\dot{z}^0\dot{z}^l. \tag{A. 8$'$}$$

これを $\nu=1,2,3$ の場合に代入すれば

$$M^{l\nu}(\tau) = -m(\tau)\dot{z}^l\dot{z}^\nu, \qquad (l,\nu=1,2,3).$$

(A. 8), (A. 8)$'$ と一緒にして，一般に $\mu,\nu=0,\cdots,3$ に対して

$$M^{\mu\nu}(\tau) = -m(\tau)\dot{z}^\mu\dot{z}^\nu. \tag{A. 8$''$}$$

(A. 8)″ の右辺に－をつけたのは，$M^0{}_0$ が正のエネルギー密度となるようにするためである.

(A. 8)″ および (A. 5)′ を (A. 7) の f に比例する項に代入すると

$$\frac{d}{d\tau}(m\dot{z}^\nu)-mA_\mu\dot{z}^\mu\dot{z}^\nu+m\cdot{}^*\Gamma^\nu{}_{\mu\rho}\dot{z}^\mu\dot{z}^\rho=ef^\nu{}_\mu\dot{z}^\mu \qquad \text{(A. 9)}$$

という運動方程式が求まる.

また (A. 8)″ を (A. 6) に代入すると

$$\frac{de(\tau)}{d\tau}=-\frac{m}{2}g_{\mu\nu}\dot{z}^\mu\dot{z}^\nu \qquad \text{(A. 6)}'$$

となる. (A. 9), (A. 6)′ は，それぞれ本文の (3. 32) および (3. 33) にほかならない.

これらの式で e, m はいずれも一般には τ の関数と考えねばならない. しかしそれらが τ のどんな関数であるべきかについてはきめ手がない. 最も簡単な考えは，これらを定数と要請することである.

ところで (A. 5)′ において，J^μ, $\dot{z}^\mu$ はともに $-a$ 次のゲージ可変量であるから，e はゲージ不変である. これに対して (A. 8)″ の左辺は $-(1+a)$ 次の可変量だから，右辺の m は $a-1$ 次のゲージ可変量である. それゆえ，ゲージ変換に応じて

$$m\rightarrow m\exp[(a-1)\lambda\{z(\tau)\}]$$

のように変換される. したがって m を定数とおくためには $a=1$ ととらねばならない.

このときは e も m も定数とみなすことが許される. それと同時に (A. 6)′ から

$$g_{\mu\nu}\dot{z}^\mu\dot{z}^\nu=0 \qquad \text{(A. 10)}$$

となる.

e, m が定数ならば，(A. 9) に，本文 (3. 7) の ${}^*\Gamma$ の定義を代入し，さらに (A. 10) を用いると

$$\frac{d}{d\tau}\dot{z}^\nu+\Gamma^\nu{}_{\alpha\beta}\dot{z}^\alpha\dot{z}^\beta=\frac{e}{m}f^\nu{}_\mu\dot{z}^\mu. \qquad \text{(A. 11)}$$

これはみかけの上では一般相対論における荷電粒子の運動方程式 (2. 22) とま

ったく同じである．しかし，(2.22)と異なり，(A. 11)は(A. 10)という条件がついている．また(A. 11)にでてきたτは質点の固有時ではない．これは大きなちがいである．

なおゲージ変換に対して，(A. 11)の両辺が同じように変換されるためには条件(A. 10)は不可欠である．

B　連続群に関する用語の説明

第II，III編を理解するのに，あるいは必要と思われる数学用語，特に線形Lie群に関する用語の簡単な説明をしよう．なおこの付録では，種々の行列が出てくる．本来ならば行列は太字で表わすはずであるが，誤解を招くことはないと思うから，普通の文字を使うことにした．

連続群

群Gのすべての元(element)がn個(あるいは無限個)の連続パラメーターa^r $(r=1,2,\cdots,n)$によって，$F(a_1,\cdots,a_n)$あるいは略して$F(a)$のように指定されているとする．特にすべてのa^rが0となる元$F(0)$がGの単位元Eとなるようにパラメーターが選ばれているものとする．また$F(a)$の逆元を表わすパラメーターを$(a^{-1})^r$と書くことにする．このようにすれば，以下の関係式が成立する：

$$F(a)\cdot F(a^{-1})=F(a^{-1})\cdot F(a)=F(0), \qquad F(a)^{-1}=F(a^{-1}).$$

いま，パラメーターa^r, b^r, c^rに対応する元を$F(a), F(b), F(c)\in G$とする．もし$F(c)=F(a)\cdot F(b)$ならば，パラメーターについても

$$c^r=f^r(a^1,\cdots,a^n;\ b^1,\cdots,b^n)\overset{d}{\equiv}f^r(a;\ b)$$

という関係が存在する．(これを$c=a\cdot b$と略記する.)

パラメーターの結合則を表わす関数f^rは，以下の性質をもつ：

1)　$f^r(a;\ b\cdot c)\overset{d}{\equiv}f^r\{a;\ f(b;\ c)\}=f^r\{f(a;\ b);\ c\}\overset{d}{\equiv}f^r(a\cdot b;\ c)$

2)　$f^r(a;\ a^{-1})=f^r(a^{-1};\ a)=0$

3)　$f^r(0;\ a)=f^r(a;\ 0)=a^r$

4)　$f^r(a;\ b)$はa^s, b^tについて必要な階数まで連続微分可能とする．

このときGをn個のパラメーターに依存する**連続群**とよぶ．

例.

複素数の行列要素をもつ$(N\times N)$行列で，その行列式が0でないものの全体は，連続群である．その行列要素を$\delta^i{}_k+a^i{}_k$ $(i,k=1,2,\cdots,N)$とかけば，パラ

メーターの結合則を表わす関数は

$$f^i{}_k(a;\ b) \stackrel{d}{\equiv} a^i{}_k + b^i{}_k + a^i{}_l b^l{}_k$$

である．これは N^2 個の複素数パラメーターに依存する連続群である．これを $GL(N, C)$ と書く．N は行列の次数，C はその要素が複素数であることを示す．

群の行列表現

複素数(あるいは実数でもよい)の行列要素からなる N 次の正方行列の集合 $M(N,C)$ のある部分集合を $M'(N, C)$ とする．

群 G の元と，M' に属する行列の間にはひとつの対応が定義されており，さらに G の元の積には，対応する M' の行列の行列積が対応するものとする．これを数式で書けば，次のようになる．

いま任意の元 $A, B, C \in G$ には，それぞれ行列 $X(A), X(B), X(C) \in M'$ が対応するものとする．もし $C = A \cdot B$ ならば，これに対応して $X(C) = X(A) \cdot X(B)$ が必ず成立する．

G と M' の間の対応が以上の条件をみたすとき，M' を G の**行列表現**という．特に対応が 1 対 1 のとき，これを忠実な表現という．

線形 Lie 群

$GL(N, C)$ の閉部分群を**線形 Lie 群**という．

例．

a)　$GL(N, C)$ 自身はもちろん，線形 Lie 群の 1 例である．

b)　det $X = 1$ という N 次の複素行列 X の集合．これを $SL(N, C)$ とかく．

c)　N 次のユニタリー行列の集合: $U(N)$.

d)　$U(N)$ の元で，行列式が 1 となる行列の集合: $SU(N)$.

Lie 代数

G を線形 Lie 群とする．いま実数 a をどのようにとろうとも，ある行列 $X \in M(N, C)$ に対して，必ず

$$\exp(aX) \stackrel{d}{\equiv} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(aX)^k \in G$$

となるとする．このような行列 X の全体の作る集合 $\mathfrak{g}$ を線形 Lie 群 G の **Lie 代数**という．

例．

a)　線形 Lie 群 $GL(N, C)$ の Lie 代数を $gl(N, C)$ とかく．これは，$M(N, C)$ そのものである．

b)　群 $SL(N, C)$ に対する Lie 代数を $sl(N, C)$ とかく．

$\exp(aX) \in SL(N, C)$ とすれば

$$1 = \det\{\exp(aX)\} = \exp\{a \cdot \mathrm{Tr}(X)\}.$$

そこで，X の対角要素の和 $\mathrm{Tr}(X)$ は 0 でなければならない．それゆえ $sl(N, C)$ は，$M(N, C)$ に属する行列で，さらに，条件 $\mathrm{Tr}(X)=0$ をみたす X の集合である．これを

$$sl(N, C) = \{X \in M(N, C) \mid \mathrm{Tr}(X)=0\}$$

とかく．

c)　群 $U(N)$ の Lie 代数を $u(N)$ とかけば

$$u(N) = \{X \in M(N, C) \mid X^\dagger = -X\}.$$

ここで，$X^\dagger$ は X のエルミット共役を示す．

d)　最後に，群 $SU(N)$ に対する代数を $su(N)$ とかけば，

$$su(N) = \{X \in M(N, C) \mid X^\dagger = -X, \text{ さらに } \mathrm{Tr}(X)=0\}.$$

定理．

線形 Lie 群 G の Lie 代数を $\mathfrak{g}$ とすれば，以下のことが成りたつ．

1)　a を任意の実数，$A \in \mathfrak{g}$ ならば $aA \in \mathfrak{g}$.

2)　$A, B \in \mathfrak{g}$ ならば，$A+B \in \mathfrak{g}$, $[A, B] \stackrel{d}{\equiv} AB-BA \in \mathfrak{g}$.

線形 Lie 群 G が n パラメーターの連続群のとき，任意の元 $F(a) \in G$ から，n 個の行列

$$G_r \stackrel{d}{\equiv} \frac{\partial}{\partial a^r} F(a^1, \cdots, a^n)\bigg|_{a=0} \qquad (r=1, \cdots, n) \tag{B. 1}$$

を定義する(微分の後，すべての a を 0 とおく)．

さきに述べた定理により，任意の元 $X \in \mathfrak{g}$ は，実数係数 c^r を用いて

$$X = c^r G_r$$

という形に，ただひと通りに必ず表わされる．

この事情から，G_r を $\mathfrak{g}$ の基底(base)，あるいは基，また物理学では，群 G の**生成元**(generator)とよぶこともある．

いま任意の2個の元 $F(a), F(b) \in G$ を考えよう．これは

$$G \ni F(c) = F(a)\cdot F(b) \tag{B. 2}$$

を満足する．ここで c は

$$c^r = f^r(a;\ b).$$

(B. 2)の両辺を a^r, b^s で微分した後，a, b をすべて0とおこう．この結果に

$$\frac{\partial}{\partial a^r} f^p(a;\ b)\Big|_{b=0} = \frac{\partial}{\partial b^r} f^p(a;\ b)\Big|_{a=0} = \delta^p{}_r$$

という関係式を使うと，それは

$$\frac{\partial^2 F(c)}{\partial c^r \partial c^s}\Big|_{c=0} + G_p f_r{}^p{}_s(0;\ 0) = G_r \cdot G_s \tag{B. 3}$$

となる．

ここで B. S. DeWitt[16] の考案した以下のような記号を借用した．

$$f_{rs\cdots}{}^p{}_{tu\cdots}(a;\ b) \stackrel{d}{\equiv} \frac{\partial}{\partial a^r}\frac{\partial}{\partial a^s}\cdots\frac{\partial}{\partial b^t}\frac{\partial}{\partial b^u}\cdots f^p(a;\ b).$$

すなわち，a に関する微分を示す添字 $r, s, \cdots$ は p より左に，また b に関するそれを示す添字 $t, u, \cdots$ は p より右側に書く．そこで $f_r{}^p{}_s(0;\ 0)$ は

$$f_r{}^p{}_s(0;\ 0) = \left[\frac{\partial}{\partial a^r}\frac{\partial}{\partial b^s} f^p(a;\ b)\right]_{a=0, b=0}$$

を表わす．

(B. 3)の r と s を置きかえて，(B. 3)との差を求めれば

$$[G_r, G_s] = C_r{}^p{}_s G_p \tag{B. 4}$$

が導かれる．

ここで

$$C_r{}^p{}_s \stackrel{d}{\equiv} f_r{}^p{}_s(0;\ 0) - f_s{}^p{}_r(0;\ 0) = -C_s{}^p{}_r \tag{B. 5}$$

は，群の**構造定数**とよばれるもので，(B. 5)からわかるように，G の結合則を表わす関数によって，それは完全に規定される．しかしパラメーターのとり方

を変更すれば，f^r はもちろんのこと，基 G_r や，構造定数 $C_r{}^p{}_s$ も変化することはいうまでもない．

(B. 4) を用いれば，任意の元 $a^r G_r \in \mathfrak{g}$ が前述の定理を満足することは容易にわかるであろう．

群の反傾表現

物理学では連続群の行列表現が重要な役割を演ずる場合が多い．場を表わす関数 φ^i $(i=1, 2, \cdots, N)$ の変換が

$$\varphi^i \to \varphi'^i \overset{d}{\equiv} D(a^1, \cdots, a^n)^i{}_k \cdot \varphi^k \tag{B. 6}$$

のように，$N\times N$ 行列 $D(a)$ を用いて表わされるとする．この行列が，n 個の実数のパラメーター a^r $(r=1, \cdots, n)$ に依存する連続群 G の N 次の行列表現になっているとする．

G の元 $F(a)$ と，その表現行列との対応（あるいは写像ともいう）を⇒で表わすことにすれば，(B. 6) はつぎのような対応（これを表現 D とかこう）である：

$$D: F(a) \in G \Rightarrow D(a). \tag{B. 7}$$

ところで

$$F(a) \in G \Rightarrow {}^t D^{-1}(a) \tag{B. 8}$$

という対応を考えてみよう．左肩の t は行と列の置きかえを示す．

いま $F(a), F(b), F(c) \in G$ にはそれぞれ $D(a), D(b), D(c)$ が対応するとし，さらに

$$c^r = f^r(a;\ b), \quad F(c) = F(a)\cdot F(b)$$

とする．

D は G の表現であるから，

$$D(c) = D(a)\cdot D(b)$$

が成りたつ．

一方，対応 (B. 8) によれば

$$\begin{aligned} F(c) = F(a)\cdot F(b) &\Rightarrow {}^t D(a)^{-1}\cdot {}^t D(b)^{-1} \\ &= {}^t\{D(a)\cdot D(b)\}^{-1} = {}^t D(c)^{-1}. \end{aligned}$$

したがって対応 (B. 8) もまた G の N 次の行列表現となる．表現 ${}^t D^{-1}$ を D に**反傾な表現**という．あるいは D と ${}^t D^{-1}$ とは互いに**反傾**(contragredient) であ

るという．

$^tD(a)^{-1}$ の行列要素は

$$\{{}^tD(a)^{-1}\}_k{}^i \overset{d}{\equiv} \{D(a)^{-1}\}^i{}_k$$

だから，これによって変換される場の量には添字を下につけて $\psi_i\,(i=1,2,\cdots,N)$ と記すことにすれば，$F(a)\in G$ に対応して ψ_i は

$$\psi_i \to \psi'_i \overset{d}{\equiv} \{{}^tD(a)^{-1}\}_i{}^k\psi_k = \psi_k\{D(a)^{-1}\}^k{}_i \tag{B. 9}$$

となる．

そこで $\psi_k\varphi^k$ は変換群 G に対して不変となる．この ψ_k を，φ^k に反傾な N 次元ベクトルという．

ところで，すべての $F(a)\in G$ に対して

$$SD(a)S^{-1} = {}^tD(a)^{-1} \tag{B. 10}$$

という関係を満足する行列 S が存在するとき表現 D と，$^tD^{-1}$ とは**同値**であるという．

D と $^tD^{-1}$ が同値なら(B. 10)から

$$[S^{-1}\cdot{}^tS, D(a)] = 0.$$

もし表現 D が G の既約表現ならば，**Schur の定理**により*)

$$S^{-1}\cdot{}^tS = \lambda E, \quad (\lambda=\text{未定の定数}),$$

あるいは

$$^tS = \lambda S.$$

この行列式を求めれば

$$\lambda^N = 1.$$

もし D が実数の行列ならば，S も実数行列となる．したがって λ も実数となるから

$$^tS = \pm S$$

となる．ただし N が奇数のときは－は許されない．

なお(B. 10)の行列式は

$$\det D(a) = \pm 1$$

となる．特に $D(a)$ が E に連続的に繫っているときは $+1$ になる．

---

*) E は単位行列を示す．

最後に行列 S, S^{-1} の要素をそれぞれ $S_{ij}, (S^{-1})^{ij}$ と書くことにすれば, (B.10) は, 行列要素を用いるとき次のようになる:

$$S_{im}D(a)^m{}_n(S^{-1})^{nk} = \{{}^tD(a)^{-1}\}_i{}^k = D(a^{-1})^k{}_i.$$

いま

$$\varphi_i \overset{d}{\equiv} S_{ij}\varphi^j \tag{B. 11}$$

と書くことにすれば, 逆に次の関係もなりたつ.

$$\varphi^j = (S^{-1})^{jk}\varphi_k.$$

そこで $F(a)\in G$ に対応して, φ^i が(B. 6)のように変換されれば, (B. 11)で定義された φ_i は

$$\varphi_i \to \varphi'_i \overset{d}{\equiv} S_{ij}\varphi'^j = (SD(a)S^{-1})_i{}^k\varphi_k$$
$$= \{{}^tD(a)^{-1}\}_i{}^k\varphi_k = \varphi_k D(a^{-1})^k{}_i.$$

つまり行列 S が存在するときは, 同じ変換性をもつ2個の N 次元ベクトル ψ^i, φ^i, あるいは ψ_i, φ_i から

$$\psi^i S_{ik}\varphi^k = \psi_i(S^{-1})^{ik}\varphi_k$$

のようにして, G に対して不変なスカラー積を定義することができる.

例 1.

Lorentz 変換

$$x^\mu \to x'^\mu = a^\mu{}_\nu x^\nu$$

では係数 $a^\mu{}_\nu$ は

$$\eta_{\mu\nu}a^\mu{}_\alpha a^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}$$

という条件をみたさねばならない.

この条件に $(a^{-1})^\beta{}_\sigma\eta^{\alpha\rho}$ をかけると

$$\eta_{\sigma\mu}a^\mu{}_\alpha\eta^{\alpha\rho} = (a^{-1})^\rho{}_\sigma \overset{d}{\equiv} ({}^ta^{-1})_\sigma{}^\rho$$

となる. これは(B. 10)とまったく同じ形をしている. S は $\eta_{\sigma\mu}$, S^{-1} は $\eta^{\alpha\rho}$ に相当する. また $D(a)$ に相当する $a^\mu{}_\nu$ は, よく知られているように $\det(a^\mu{}_\nu)=\pm 1$ である.

例 2.

電子に対する Dirac の波動方程式を

$$(\gamma^\mu\partial_\mu + m)^\alpha{}_\beta\cdot\psi^\beta(x) = 0$$

とする.

Lorentz 変換に対して ψ は

$$\psi^\alpha \to \psi'^\alpha = T^\alpha{}_\beta \cdot \psi^\beta \tag{B. 12}$$

という変換をうける．Lorentz 群の 4 次の表現行列である T は複素行列である．

いま $\beta = i\gamma^0$ を用いて

$$\psi^\dagger{}_\alpha \overset{d}{\equiv} (\psi^\alpha)^*, \qquad \bar{\psi}_\alpha \overset{d}{\equiv} \psi^\dagger{}_\lambda \beta^\lambda{}_\alpha$$

と定義する．* は複素共役を示す．また $\psi^\dagger$ の添字を下につけたのは $\psi^\dagger$ が横 1 行の行列ということを表わす．

変換(B. 12)に応じて，$\bar{\psi}$ は

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_\alpha \to \bar{\psi}'_\alpha(x') &\overset{d}{\equiv} (\psi')^\dagger{}_\lambda \beta^\lambda{}_\alpha \\ &= (\bar{\psi}\beta)_\sigma (T^\dagger)^\sigma{}_\lambda \beta^\lambda{}_\alpha = \bar{\psi}_\beta (\beta T^\dagger \beta)^\beta{}_\alpha\end{aligned} \tag{B. 13}$$

となる．ここで

$$(T^\dagger)^\alpha{}_\beta \overset{d}{\equiv} (T^\beta{}_\alpha)^*$$

である．

一方よく知られているように $\bar{\psi}$ は

$$\bar{\psi}_\alpha \to \bar{\psi}'_\alpha = \bar{\psi}_\beta (T^{-1})^\beta{}_\alpha$$

のように変換される．

そこで，(B. 13)との比較から

$$(\beta T^\dagger \beta) = (T^{-1}).$$

あるいは，両辺のエルミット共役を求めると $\beta^\dagger = \beta$ だから

$$(\beta T \beta) = (T^\dagger)^{-1}. \tag{B. 14}$$

T が Lorentz 群の複素行列表現であるために，(B. 10)の転位行列の代わりにエルミット共役の行列が顔を出していることを除けば，(B. 14)はまさに(B. 10)と同じ形をしている．$\beta^2 = 1$ であるから，β が(B. 10)の S と S^{-1} の二役を演じていることは，あらためていうまでもなかろう．

線形 Lie 群および Lie 代数の随伴表現

G を線形 Lie 群，$\mathfrak{g}$ をその Lie 代数とする．

いま $X \in G, A \in \mathfrak{g}$ とする．t を任意の実数とすれば，$\exp(tA) \in G$ であるから

$$G \ni X \cdot \exp(tA) \cdot X^{-1} = \exp(t \cdot XAX^{-1}).$$

したがって $XAX^{-1}\in\mathfrak{g}$ となる．

ここで特に A として，$\mathfrak{g}$ の基底 G_r をとれば

$$XG_rX^{-1} = G_sC^s{}_r$$

のように書き表わされるはずである．係数 $C^s{}_r$ は X の関数である．これを $n\times n$ 行列 $C(X)$ の (s,r) 要素とみなせば，それが G の表現となることは，容易にわかるであろう．

この表現を G の**随伴表現**(adjoint representation)とよび，$\{C(X)\}^s{}_r$ の代わりに $\{\mathrm{Ad}(X)\}^s{}_r$ と書く．すなわち

$$G_s\{\mathrm{Ad}(X)\}^s{}_r \overset{d}{\equiv} XG_rX^{-1}. \tag{B.15}$$

いま $X\in G$ が，実数 s を用いて

$$X \overset{d}{\equiv} \exp(sB), \qquad B\in\mathfrak{g}$$

のように書き表わされるとする．

このとき

$$\mathrm{Ad}(X) = \mathrm{Ad}\{\exp(sB)\} \overset{d}{\equiv} \exp\{s\cdot \mathrm{ad}(B)\} \tag{B. 16}$$

により n 次の正方行列 $\mathrm{ad}(B)$ を定義しよう．この $\mathrm{ad}(B)$ を **Lie 代数の随伴表現**という．

(B. 15) に (B. 16) を代入すると

$$\exp(sB)\cdot G_r\cdot \exp(-sB) = G_p\cdot\left[\exp\{s\cdot \mathrm{ad}(B)\}\right]^p{}_r.$$

両辺を s で微分した後，$s=0$ とおけば

$$[B, G_r] = G_p\{\mathrm{ad}(B)\}^p{}_r.$$

ここで B として特に G_s とおけば

$$[G_s, G_r] = G_p\{\mathrm{ad}(G_s)\}^p{}_r. \tag{B. 17}$$

これと (B. 4) を比べると

$$\{\mathrm{ad}(G_s)\}^p{}_r = C_s{}^p{}_r = -C_r{}^p{}_s \tag{B. 18}$$

となる．

一方，Jacobi の恒等式

$$\left[[G_r, G_s], G_t\right]+\left[[G_s, G_t], G_r\right]+\left[[G_t, G_r], G_s\right] \equiv 0$$

に (B. 4) を代入すれば

$$C_r{}^p{}_s\cdot C_p{}^q{}_t + C_s{}^p{}_t\cdot C_p{}^q{}_r + C_t{}^p{}_r\cdot C_p{}^q{}_s = 0 \tag{B. 19}$$

という関係式が導かれる．これに (B. 18) を代入すると

$$\left[\mathrm{ad}(G_s), \mathrm{ad}(G_r)\right]^q{}_t = \left\{\mathrm{ad}(G_p)\right\}^q{}_t C_s{}^p{}_r.$$

これは(B. 17), あるいは(B. 4) とまったく同じ関係を表わしている．このことから $\mathrm{ad}(G_r)$ がたしかに Lie 代数 $\mathfrak{g}$ の表現であることがわかる．

群多様体の計量テンソル

連続群 G の n 個のパラメーター a^r を座標とする点の集合を**群多様体**(group manifold) M とよぶことにする．この中の点 a は，G の元 $F(a)$ を表わす．

ひとつの元 $F(b) \in G$ により，任意の点 $a \in M$ は

$$a^r \to a'^r = f^r(b;\ a) \in M \tag{B. 20}$$

のような移動をうける．

いま**計量テンソル** $\gamma_{rs}(a)$ を適当に定義して，2 点 $a, a+da \in M$ の間の距離を

$$d\sigma^2(a) \overset{d}{\equiv} \gamma_{rs}(a) da^r da^s \tag{B. 21}$$

と定義する．

ここで $d\sigma^2$ が，移動(B. 20)に対して不変となるようにするには，計量テンソル $\gamma_{rs}(a)$ がどのようなものであればよいかを考えてみよう．

いま移動(B. 20)で，b を無限小として，つぎのようにおく：

$$a^r \to a'^r = a^r + \varDelta a^r \approx a^r + b^p \frac{\partial}{\partial b^p} f^r(b;\ a)\bigg|_{b=0}. \tag{B. 20$'$}$$

ここで再び DeWitt の記号を借用して

$$\left.\begin{aligned} L(a)^r{}_p &\overset{d}{\equiv} \frac{\partial}{\partial b^p} f^r(b;\ a)\bigg|_{b=0} = f_p{}^r(0;\ a) \\ R(b)^r{}_s &\overset{d}{\equiv} \frac{\partial}{\partial a^s} f^r(b;\ a)\bigg|_{a=0} = f^r{}_s(b;\ 0) \end{aligned}\right\} \tag{B. 22}$$

と書くことにする．

これらの記法を使うと (B. 20)$'$ の $\varDelta a^r$ は

$$\varDelta a^r = b^p L(a)^r{}_p \tag{B. 23}$$

となる．

そこで $d\sigma^2(a+\varDelta a) = d\sigma^2(a)$ という要求は

$$\{\gamma_{rs,u} \cdot \varDelta a^u + \gamma_{ru}(\varDelta a^u)_{,s} + \gamma_{su}(\varDelta a^u)_{,r}\} da^r da^s = 0$$

となる．あるいは(B. 23)を使って

$$\gamma_{rs,u}L^u{}_t+\gamma_{ru}L^u{}_{t,s}+\gamma_{su}L^u{}_{t,r}=0 \tag{B. 24}$$

となる．γ や L は点 a における値を示す．また $L(a)^u{}_{t,r}\overset{d}{\equiv}\dfrac{\partial}{\partial a^r}L(a)^u{}_t$ である．

結合則 $f^r(b;\ a)$ が与えられているとき，$L(a)^u{}_t$ は(B. 22)により与えられるから，(B. 24)は γ_{rs} に対する方程式である．

(B. 24)を解いて $\gamma_{rs}(a)$ を求めるには，まず $L^u{}_{t,r}$ を書き換える必要がある．そのためには行列 $L(a)^u{}_r, R(a)^u{}_r$ がそれぞれ逆行列 $L^{-1}(a)^r{}_p, R^{-1}(a)^r{}_p$ をもつことを示さねばならない．

結合則 $f^r(a\cdot b;c)=f^r(a;b\cdot c)$を c^s で微分すると

$$f^r{}_s(a\cdot b;c)=f^r{}_p(a;b\cdot c)\cdot f^p{}_s(b;c).$$

この式の c を 0 とおけば次のようになる $[b\cdot 0=f(b;0)=b$ に注意$]$:

$$R(a\cdot b)^r{}_s=f^r{}_p(a;b)\cdot R(b)^p{}_s.$$

さらに a を b^{-1} とおけば，$b^{-1}\cdot b=0$ となるから，上の式の左辺は

$$R(0)^r{}_s=\frac{\partial}{\partial c^s}f^r(0;c)\bigg|_{c=0}=\delta^r{}_s.$$

そこでもとの式は次のようになる：

$$\delta^r{}_s=f^r{}_p(b^{-1};b)\cdot R(b)^p{}_s.$$

すなわち R^{-1} は次のようなものである：

$$R^{-1}(b)^r{}_p\overset{d}{\equiv}f^r{}_p(b^{-1};b). \tag{B. 25}$$

もし最初の結合則を a^s で微分し，$a=0$，$c=b^{-1}$ とおけば L^{-1} の存在を証明できる：

$$L^{-1}(b)^r{}_p\overset{d}{\equiv}f_p{}^r(b;b^{-1}). \tag{B. 26}$$

さて，これから群のパラメーターを，x, y, z で表わし $f^u(x;\ y\cdot z)=f^u(x\cdot y;\ z)$ の両辺を x^t, z^v で微分すると

$$f_t{}^u{}_p(x;y\cdot z)f^p{}_v(y;z)=f_p{}^u{}_v(x\cdot y;z)f_t{}^p(x;y).$$

ここで $x=0, y=a, z=0$ とおけば

$$L(a)^u{}_{t,p}R(a)^p{}_v=R(a)^u{}_{v,p}L(a)^p{}_t \tag{B. 27}$$

となる．あるいは両辺に $R^{-1}(a)^v{}_s$ をかけると

$$L(a)^u{}_{t,s}=R(a)^u{}_{v,p}L(a)^p{}_tR^{-1}(a)^v{}_s \tag{B. 28}$$

となる．

この関係を(B. 24)に代入し，さらに両辺に $(L^{-1})^t{}_q\cdot R^r{}_m\cdot R^s{}_n$ をかけると，

(B. 24) は

$$\frac{\partial}{\partial a^q}\{\gamma_{rs}(a)R^r{}_m(a)R^s{}_n(a)\} = 0 \tag{B. 29}$$

となる．そこで $\gamma_{rs}(a)$ は

$$\gamma_{rs}(a) = C_{pq}\cdot R^{-1}(a)^p{}_r\cdot R^{-1}(a)^q{}_s \tag{B. 30}$$

である．ここで $C_{ab}(=C_{ba})$ は，その行列式が 0 でさえなければ，任意の定数でかまわない．

なお計量テンソル γ_{rs} から導かれる接続係数を

$$\Gamma^p{}_{rs} \overset{d}{\equiv} \frac{1}{2}\gamma^{pq}(\gamma_{qr,s}+\gamma_{sq,r}-\gamma_{rs,q})$$

とおけば，(B. 24) は当然のことながら

$$\nabla_p(\varDelta a_q)+\nabla_q(\varDelta a_p) = 0 \tag{B. 31}$$

となる．ここで次の記号を用いた：

$$\varDelta a_q \overset{d}{\equiv} \gamma_{qs}\cdot\varDelta a^s = \gamma_{qs}(b^t L^s{}_t),$$
$$\nabla_p(\varDelta a_q) \overset{d}{\equiv} (\varDelta a_q)_{,p}-\Gamma^r{}_{pq}\varDelta a_r.$$

(B. 31) は計量テンソル γ_{rs} をもつ n 次元空間における Killing の方程式にほかならない．これは，G のそれぞれの元が M の中に引き起こす (B. 20) のような移動が**等長変換**，つまり Killing の意味での**運動** (motion) であることを示すものである．

なお (B. 20) の代わりに

$$a^r \to a''^r = f^r(a\,;b) \in M$$

という移動も考えられる．これは元 $F(b)\in G$ を，点 a に，今までとは逆に右から作用させることにより起こる“運動”である．

この移動が等長変換となるためには γ_{rs} は，(B. 24) の代りに

$$\gamma_{rs,u}R^u{}_t+\gamma_{ru}R^u{}_{t,s}+\gamma_{su}R^u{}_{t,r} = 0 \tag{B. 24$'$}$$

をみたさねばならない．この解は

$$\gamma_{rs}(a) = C_{pq}L^{-1}(a)^p{}_r L^{-1}(a)^q{}_s \tag{B. 30$'$}$$

となる．

最後に (B. 30) から導かれる結果を二つ追加する．

群多様体 M の中の n 次元ベクトル da^r は $F(b)\in G$ によって，無限小変換 (b

は無限小)

$$da^r \to da'^r = \{\partial^r{}_s + b^p L(a)^r{}_{p,s}\} da^s \tag{B. 32}$$

をうける.

そこで $d\sigma^2$ が不変ということから,

$$da_r \overset{d}{\equiv} \gamma_{rs} da^s \to da'_r = \{\partial^s{}_r - b^p L^s{}_{p,r}\} da_s \tag{B. 33}$$

という変換をうけることになる. この右辺が $\gamma_{rs}(a')da'^s$ に等しいことは, (B. 32), (B. 24) を用いれば容易にわかる.

このように $\gamma_{rs}(a)$ は, da^r に対して反傾に変換されるベクトルを導くのに役立つ.

もうひとつの事項は, M の体積素片の定義である. 例えば, M 自身の総体積を計算するには, まず体積素片の定義が必要である. しかも, それは任意の元 $F(b) \in G$ によりひきおこされる M 内の点の移動 (B. 20) に対して, 不変であることが望ましい.

点 $a \in M$ における, このような体積素片を $dv(a)$ とすると, 無限小パラメーター b に対して,

$$dv(a + \varDelta a) = dv(a), \qquad \varDelta a^r = b^p L(a)^r{}_p \tag{B. 34}$$

である.

これを満足するものとしては

$$\left.\begin{aligned} dv(a) &= \sqrt{\det\{\gamma_{rs}(a)\}} \cdot d^n a \\ d^n a &\overset{d}{\equiv} da^1 da^2 \cdots da^n \end{aligned}\right\} \tag{B. 35}$$

とすればよい.

(B. 30) を用いれば

$$dv(a) = \sqrt{|\det(C_{ab})|} \cdot [\det\{R(a)^r{}_s\}]^{-1} \cdot d^n a. \tag{B. 35$'$}$$

(B. 35)′ が (B. 34) を満足していることを示そう.

$$C \overset{d}{\equiv} \det(C_{ab}), \qquad R \overset{d}{\equiv} \det(R^r{}_s)$$

とかくことにすれば

$$\begin{aligned} dv(a + \varDelta a) &= \sqrt{|C|} R^{-1}(a + \varDelta a) \cdot \frac{\partial(a + \varDelta a)}{\partial(a)} d^n a \\ &= dv(a) + \sqrt{|C|} \left\{ -\frac{1}{R^2} \frac{\partial R}{\partial a^r} \varDelta a^r + \frac{1}{R} \frac{\partial \varDelta a^r}{\partial a^r} \right\} d^n a. \end{aligned}$$

ところで行列式の定理により

$$\frac{\partial R}{\partial a^r} = R\cdot(R^{-1})^u{}_v\cdot R^v{}_{u,r}$$

だから，ひとつ前の式の右辺第2項の{　}の中は

$$R^{-1}\cdot b^p\{-(R^{-1})^u{}_v\cdot R^v{}_{u,r}L^r{}_p + L^r{}_{p,r}\}$$

となる．

これに(B. 28)を代入すれば0となるから，(B. 35)′はたしかに(B. 34)を満足している．

Gの元によるM内の点移動を，上の話とは逆に，右から$F(b)$を作用させることによりひき起こすとすれば，$\gamma_{rs}(a)$として，(B. 30)′を採用すればよい．そのときの体積素片は

$$dv_L(a) \overset{d}{\equiv} \sqrt{C}[\det\{L(a)^r{}_s\}]^{-1}d^n a \tag{B. 36}$$

となる．これと区別するために，(B. 35)′には添字Rをつけて

$$dv_R(a) \overset{d}{\equiv} \sqrt{C}[\det\{R(a)^r{}_s\}]^{-1}d^n a \tag{B. 35$''$}$$

とかくことにする．

多様体の上での積分は，dv_Lを用いるかdv_Rにするかで，積分値は一致するとはかぎらない．しかしdv_Lを用いた場合のMの体積が有限確定となるときは，dv_Rを用いてもその値が一致する．

コンパクト半単純 Lie 群

Lie 群が**コンパクト**(compact)とは，その群多様体Mの体積が有限な群のことである．このときはdv_L, dv_Rのいずれを用いてもその体積の値は一致する．

任意のコンパクトな群は，その表現を適当にとれば，必ずユニタリー行列で表わされる．特に実数表現にすれば，直交行列で表わされる．

Gが，単位元以外には，可換な不変部分群をもたないとき，Gを**半単純**(semi-simple)という．

Cartan は次のことを証明した．

線形 Lie 群が半単純であるための必要十分条件は，

$$\kappa_{rs} \overset{d}{\equiv} \kappa(G_r, G_s) \overset{d}{\equiv} -\mathrm{Tr}\{\mathrm{ad}(G_r)\cdot\mathrm{ad}(G_s)\} \tag{B. 37}$$

を (r, s) 要素とする行列式が0でないということである．κ_{rs} を **Killing 形式**[*] とよぶ．これは(B. 18)により

$$\kappa_{rs} = -C_r{}^u{}_v C_s{}^v{}_u = \kappa_{sr} \tag{3. 37$'$}$$

とかくこともできる．

物理学に登場する Lie 群は，Lorentz 群を除外すればすべてコンパクト半単純群と思ってさしつかえない．そこでその Lie 群 G に対する Killing 形式を κ_{rs}，またその逆を $(\kappa^{-1})^{st}\{=(\kappa^{-1})^{ts}\}$ とする．したがって

$$\kappa_{rs}(\kappa^{-1})^{st} = \delta^t{}_r$$

が成立する．

いま，(B. 19)，あるいはそれと同じものである

$$\mathrm{ad}(G_s)\cdot\mathrm{ad}(G_r)-\mathrm{ad}(G_r)\cdot\mathrm{ad}(G_s) = \mathrm{ad}(G_t)\cdot C_s{}^t{}_r$$

に $\mathrm{ad}(G_u)$ をかけて Tr(対角和)を求めると

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\{\mathrm{ad}(G_s)\cdot\mathrm{ad}(G_r)\cdot\mathrm{ad}(G_u)\}-\mathrm{Tr}\{\mathrm{ad}(G_r)\cdot\mathrm{ad}(G_s)\cdot\mathrm{ad}(G_u)\}\\ = \mathrm{Tr}\{\mathrm{ad}(G_t)\cdot\mathrm{ad}(G_u)\}C_s{}^t{}_r.\end{aligned} \tag{B. 38}$$

この左辺，第1項の $\mathrm{ad}(G_s)$ を右端に移すと

$$\text{左辺} = \mathrm{Tr}\{\mathrm{ad}(G_r)\cdot[\mathrm{ad}(G_u), \mathrm{ad}(G_s)]\} = \mathrm{Tr}\{\mathrm{ad}(G_r)\cdot\mathrm{ad}(G_t)\}C_u{}^t{}_s.$$

これを(B. 38)の左辺に代入すれば，(B. 37)を利用して

$$\kappa_{rt}C_u{}^t{}_s = \kappa_{tu}C_s{}^t{}_r. \tag{B. 39}$$

いま

$$\kappa_{rt}C_u{}^t{}_s \overset{d}{\equiv} C_{urs}$$

と書くことにすると(B. 39)は

$$C_{urs} = C_{sur}. \tag{B. 39$'$}$$

一方，C の元来の定義(B. 5)によれば

$$C_{urs} = -C_{sru}. \tag{B. 5$'$}$$

したがって C_{urs} は3個の添字について完全反対称である．

なおコンパクトな半単純群のときは，群のパラメーターを適当にとることにより(あるいは同じことであるが基底 G_r を適当にとることにより)

$$\kappa_{rs} = \delta_{rs} = (\kappa^{-1})^{rs} \tag{B. 40}$$

---

[*] Killing 形式は，普通には $\kappa_{rs}=+\mathrm{Tr}\{\ ,\ \}$ と定義する．しかし後の便宜のため本書では(B. 37)のように定義する．

とすることができる．

このときは

$$C_u{}^r{}_s = C_{urs}$$

となるから，添字について上下の区別は不要となる．

最後に(B. 39)を用いて，Lie 群 G の随伴表現に反傾な表現を求めてみよう．

まず a_r を実数パラメーターとして

$$X = \exp(a^r G_r) \in G, \qquad G_r \in \mathfrak{g} \tag{B. 41}$$

とする．

そこで G の随伴表現は

$$\mathrm{Ad}(X) = \exp\{a^r \cdot \mathrm{ad}(G_r)\}. \tag{B. 42}$$

これに反傾な表現が

$$\kappa_{ru}\{\mathrm{Ad}(X)\}^u{}_v(\kappa^{-1})^{vs} = \left\{{}^t\mathrm{Ad}(X^{-1})\right\}_r{}^s \tag{B. 43}$$

となることを証明しよう．ここで

$$\left\{{}^t\mathrm{Ad}(X^{-1})\right\}_r{}^s \stackrel{d}{\equiv} \left\{\mathrm{Ad}(X^{-1})\right\}^s{}_r \tag{B. 44}$$

である．

まず(B. 42)を使うと(B. 43)の左辺は

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(a^i a^j \cdots a^n)\cdot(\kappa\,\mathrm{ad}G_i\kappa^{-1}\cdot\kappa\,\mathrm{ad}G_j\kappa^{-1}\cdot\cdots\cdot\kappa\,\mathrm{ad}G_n\kappa^{-1})_r{}^s \tag{B. 43$'$}$$

ところで(B. 39)を使うと

$$\kappa_{ru}(\mathrm{ad}G_i)^u{}_v(\kappa^{-1})^{vs} = \kappa_{ru}C_i{}^u{}_v(\kappa^{-1})^{vs} = -C_i{}^s{}_r.$$

あるいは(B. 44)にならって

$$(\kappa\,\mathrm{ad}G_i\kappa^{-1})_r{}^s = -(\mathrm{ad}G_i)^s{}_r \stackrel{d}{\equiv} -\left\{{}^t(\mathrm{ad}G_i)\right\}_r{}^s. \tag{B. 45}$$

そこで(B. 43)′ は

$$\begin{aligned}\sum\frac{(-1)^n}{n!}&(a^n\cdots a^j a^i)\left\{{}^t(\mathrm{ad}G_i)\cdot{}^t(\mathrm{ad}G_j)\cdots{}^t(\mathrm{ad}G_n)\right\}_r{}^s\\ &= \left[{}^t\left\{\exp(-a^r\cdot\mathrm{ad}G_r)\right\}\right]_r{}^s = \left\{{}^t\mathrm{Ad}(X^{-1})\right\}_r{}^s\end{aligned}$$

となる．

つまり $\mathrm{Ad}(X)$，およびそれに反傾な ${}^t\mathrm{Ad}(X^{-1})$ は互いに同値な表現であり，それらを結ぶ役目をするものが κ_{rs} である．

いま，n 個の成分をもつある場の量 $\varphi^r(x)$ が $X \in G$ に対して

$$\varphi^r(x) \to \varphi'^r(x) \overset{d}{\equiv} \mathrm{Ad}(X)^r{}_s\varphi^s(x)$$

のように変換されるとすれば，

$$\varphi_r \overset{d}{\equiv} \kappa_{rs}\varphi^s$$

は

$$\begin{aligned}\varphi_r \to \varphi'_r \overset{d}{\equiv} \kappa_{rs}\varphi'^s &= \{{}^t\mathrm{Ad}(X^{-1})\}_r{}^u\varphi_u \\ &= \varphi_u\{\mathrm{Ad}(X^{-1})\}^u{}_r\end{aligned}$$

のように変換されるから，$\varphi_r\varphi^r = \kappa_{rs}\varphi^r\varphi^s$ は変換群 G に対して不変である．

なお κ_{rs} が(B. 40)のようになるときは，φ^r と φ_r の区別は不要となる．

参 考 文 献

1.

1) C. N. Yang and R. L. Mills: Phys. Rev. **96** (1954) 191.
   新編物理学選集:"ゲージ場の理論"(日本物理学会編).

2) R. Utiyama: Phys. Rev. **101** (1956) 1597.

3) H. Weyl: S. B. preuss. Akad. Wiss. (1918) 465, Math. Z. **2** (1918) 384, Ann. d. Phys. **59** (1919) 101, Phys. Z. **21** (1920) 649.

4) S. L. Glashow: Nucl. Phys. **22** (1961) 579.
   S. Weinberg: Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264.
   A. Salam: "Elementary Particle Theory: Relativistic Groups and Analyticity" (Nobel Symposium No.8) edited by N. Svartholm (Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1968 p.367).

3.

5) 論文3) を参照.

6) C. Brans and R. H. Dicke: Phys. Rev. **124** (1961) 925.
   Y. Fujii: Phys. Rev. D, **9** (1974) 874.

7) H. Weyl: ZS. f. Phys. **56** (1929) 330.

4.

8) Th. Kaluza: S. B. d. Berl. Akad. (1921) 966.
   O. Klein: ZS. f. Phys. **37** (1926) 895.

5.

9) E. Noether: Goett. Nachr. (1918) 211.

10.

10) 論文2) を参照.

11.

11) R. Utiyama: Prog. Theor. Phys. **72** (1984) 83.

12) R. Utiyama: Prog. Theor. Phys. **64** (1980) 2207.

13) 論文2) を参照.

12.

14) 論文 4) を参照.

13.

15) 藤井保憲:“超重力理論入門”(マグロウヒル).

付録 **B**

16) B. S. DeWitt and C. DeWitt: “Relativity, Groups and Topology” (Gordon and Breach, Science publishers, New York, 1963) p.663.

なお量子化の問題に関する参考書および論文

崎田文二, 吉川圭二:“径路積分による多自由度の量子力学”(岩波書店).

T. Kugo and I. Ojima: Prog. Theor. Phys. Suppl. No.66 (1979) 1.

索　　引

内山龍雄

1916年　静岡県に生まれる．
1940年　大阪帝国大学理学部物理学科卒業．
大阪大学理学部教授，帝塚山大学教授，帝塚山大学学長などを歴任，大阪大学名誉教授．
著訳書：「一般相対性および重力の理論」(共著)「ワイル：空間・時間・物質」(訳)「相対性理論入門」(岩波新書)「相対性理論」(岩波書店)など．

一般ゲージ場論序説

1987年11月20日　第1刷発行 ©
2005年6月10日　第6刷発行

著　者　内山龍雄（うちやまりょうゆう）

発行者　山口昭男

発行所　株式会社 岩波書店
〒101-8002 東京都千代田区一ツ橋2-5-5
電　話　案内 03-5210-4000
http://www.iwanami.co.jp/

印刷・三秀舎　製本・松岳社

ISBN 4-00-005040-0　Printed in Japan